

Учебные материалы по Электродинамике конденсированных сред Факультет физики ВШЭ

Текст скомпилирован 10 октября 2025 г., 12:41

Учебные материалы (программа курса по неделям с задачами на семинар и домашнее задание, конспект лекций и дополнительная литература) и текущая ведомость успеваемости находятся на [yandex.disk](#):

[папка с учебными материалами](#)

Домашнее задание сдаётся каждую неделю. Домашние задания прошлых недель, по каким-то причинам не(до)выполненные, можно доносить, но баллы будут выставляться с понижающим коэффициентом (около 0.5). При этом в течении последней недели перед экзаменом сдавать можно только задание последней недели; в течении предпоследней недели перед экзаменом можно сдавать только задания последних трёх недель.

Домашние задания и контрольные желательно выполнять на листах А4. Сдавать домашние задания и контрольные лучше и желательно в электронном виде. Такой порядок позволяет более оперативно производить проверку работ и установить обратную связь. Для изготовления скана работы в требуемом виде на смартфоне следует использовать программы

android: Genius Scan
iphone: tapScanner или Adobe Scan

Эта программа даёт возможность изготовить из фотографии *вычищенный pdf-документ в чёрно-белом* формате. Разумеется, допустимы и некоторые другие программы. Но сканы в шкале серого, или с полями, или с грязным фоном сильно не приветствуются. Совершенно невозможен приём архивов с фотографиями отдельных страниц.

У некоторых студентов есть touch-планшеты с пером, благодаря чему они могут подготавливать свои рукописные работы непосредственно в электронном виде. Это приветствуется. В этом случае студент может использовать несколько цветов за исключением красного цвета, которым преподаватель будет выделять свои пометки при проверке работ.

Оформляя лист, следует выделить сверху информационное поле горизонтальной чертой. В этом поле указывается *Фамилия Имя* автора, *тип работы* (домашнее задание №2, контрольная №1 и т.д.), *номер листа*. Название pdf-файла надо составлять по шаблону:

Ларина Татьяна - дз03.pdf
Ларина Татьяна - дз03 - доделки.pdf
Ларина Татьяна - кр2.pdf

Шаблон определяет, в том числе, пробелы, дефисы, строчные и прописные буквы. Совершенно не допускается машинное название pdf-файла, автоматически сгенерированное при его первичном создании.

Высылать домашние задания надо с корпоративной почты ВШЭ. Высылать с другой почты не желательно и можно только в том случае, если по названию почтового адреса ясно можно понять фамилию и первую букву имени отправителя, а в реквизитах почтового адреса указаны полностью Фамилия и Имя. Адреса преподавателей:

– Вергелес Сергей Сергеевич:
 ssvergeles@yandex.ru
– Воинцев Иван Алексеевич:
 ivointsev@hse.ru

ПРОГРАММА КУРСА

Темы лекций и семинаров по курсу “Электродинамика конденсированных сред”

1 Уравнения Максвелла в среде; плоские волны

Уравнения Максвелла в среде. Линейный отклик среды: диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость. Принцип причинности; соотношения Крамерса-Кронига. Две простейшие модели электромагнитного отклика сред: плазма с затуханием и среда с фоновым резонансом. Волновые пакеты: фазовая и групповая скорость, дисперсия. Граничные условия для уравнений Максвелла.

2 Термодинамика и кинетика переменного электромагнитного поля в среде с линейным откликом

Поток энергии в электромагнитной волне; вектор Умова-Пойнтинга. Плотность энергии переменного электромагнитного поля для среды с линейным откликом; формула Бриллюэна. Тепловые потери при распространении электромагнитной волны.

3 Скин-эффект

Скин-эффект: запись граничных условий в форме Леонтовича; условие применимости описания отражения волны от поверхности в терминах скин-эффекта. Скорость потока энергии в металл. Идеальный металл. Нормальный скин-эффект; условия для нормальности скин-эффекта в металлах. Глубина проникновения. Связь поверхностного импеданса с тепловым излучением.

4 Волноводы с металлическими стенками

Распространение волн в полых волноводах с идеально проводящими стенками. Волноводы с односвязными полостями. Дисперсия мод, частота отсечки. Волноводы с круглым и прямоугольным поперечным сечениями: поперечная структура мод; моды с минимальной частотой отсечки в волноводе с круглым сечением. Определение длины распространения мод в полых металлических волноводах с учётом потерь на стенках. Двухжильные волноводы: ёмкость, индуктивность и волновое сопротивление линии. Коаксиальный волновод.

5 Диэлектрические волноводы

Плоские диэлектрические волноводы: ТЕ- и ТМ-моды; количество направленных мод при фиксированной частоте, фундаментальные моды. Аксиально-симметричные диэлектрические волноводы: ступенчатый радиальный профиль показателя преломления; V - и Δ -параметры.

Аксиально-симметричные волноводы. Волноводы со ступенчатым радиальным распределением показателя преломления: дисперсионное уравнение, V - и Δ -параметры. Приближение слабо-ведущего волновода. Оптоволокно: физические характеристики, фундаментальная мода.

6 Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах

Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах. Оптическая теорема. Сечения рассеяния, поглощения и взаимодействия. Предел рассеяния на малом шаре субволнового диаметра; поведение параметров рассеяния вблизи резонансов. Прохождение света через коллоидные растворы резонансных частиц малого размера.

7 Электростатика

Уравнение на распределение электростатического поля. Однородный шар в электрическом поле. Двумерные задачи: погонные ёмкости цилиндрического конденсатора и двух параллельных проводов. Однородный эллипсоид во внешнем однородном поле: факторы деполяризации. Аксиально-симметричное удлинённое тело во внешнем однородном поле.

§1. Уравнения Максвелла в среде; плоские волны

Уравнения Максвелла в среде. Диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость. Уравнения Максвелла в вакууме. Разделение полного тока на поляризационный ток (ток связанных зарядов), циркулирующий ток (ток, связанной с намагниченностью среды) и ток свободных зарядов. Получение уравнений Максвелла в среде из уравнений Максвелла в пустоте. Диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость: понятие о временной и пространственной дисперсии. Литература: § 1-4.

Граничные условия для уравнений Максвелла в среде. Вывод, физическая интерпретация граничных условий для уравнений Максвелла в среде. Поверхностные заряды. Поверхностные токи. Методы измерения электрического поля $\mathbf{E}$, электрической индукции $\mathbf{D}$, магнитной индукции $\mathbf{B}$ и магнитного поля $\mathbf{H}$.

В ходе решения физических задач часто бывает полезным иметь возможность проводить описание отклика среды на электромагнитное поле, переходя от уравнений Максвелла в среде к уравнениям Максвелла в пустоте и обратно. Этот переход может прояснить физическую суть явления.

Принцип причинности; соотношения Крамерса-Кронига. Связь между электрической индукцией и электрическим полем в частотном представлении в случае нетривиальной временной дисперсии и отсутствии пространственной дисперсии. Аналитические свойства функции отклика в частотном представлении; физический смысл полюсов функции отклика. Соотношение Крамерса-Кронига. Литература: § 7-2, а также [Ландау и Лифшиц, 1982, § 82].

• **Задача 1:** Вычислить диэлектрическую проницаемость в частотном представлении $\varepsilon(\omega)$, если известно, что коэффициент поляризуемости (диэлектрическая восприимчивость) (1.14d) во временном представлении имеет зависимость $\chi(t) = A \exp(-t/\tau)$.

Две простейшие модели электромагнитного отклика сред: плазма с затуханием и среда с фоновым резонансом. Модель Друде для электронной плазмы в τ -приближении: запись кинетического уравнения в τ -приближении, выражение проводимости σ при конечной частоте ω через проводимость σ_0 при нулевой частоте. Плазменная частота, предел низких частот $\omega\tau \ll 1$; связь диэлектрической проницаемости с проводимостью. Модель диэлектрика как среды, состоящей из лорентцевых осцилляторов. Литература: [Памятных и Туров, 2000, § 15, § 17].

• **Задача 2:** Найдите диэлектрическую проницаемость ε_ω для среды, состоящей из лорентцевых осцилляторов. Осциллятор представляет собой заряд e мас-

сы m , помещённый в потенциал. Резонансная частота осциллятора и скорость затухания его амплитуды колебаний суть ω_0 и $\gamma \ll \omega_0$. Концентрация осцилляторов равна n . Постройте графики действительной $\varepsilon'(\omega)$ и мнимой $\varepsilon''(\omega)$ частей диэлектрической проницаемости, а также относительной фазы между вектором поляризации и электрическим полем, отдельно уделив внимание их поведению в областях i) область низких частот $\omega_0 - \omega \gg \gamma$, ii) область резонанса $|\omega - \omega_0| \lesssim \gamma$, iii) область высоких частот $\omega - \omega_0 \gg \gamma$.

• **Задача 3:** Покажите, что для системы свободных зарядов при наличии трения (модель Друде) диэлектрическая проницаемость, как функция частоты, может быть записана следующим образом:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}, \quad (1)$$

где ω_p — плазменная частота (и для модели плазмы n_e — концентрация зарядов, m_e — масса зарядов), а γ — декремент затухания.

Найдите диэлектрическую поляризуемость во временном представлении $\chi(t)$ (1.14d), соответствующую проницаемости (3.4). Объясните качественно поведение функции $\chi(t)$ на малых и больших временах.

Плоские монохроматические волны. Волновое уравнение для свободного электромагнитного поля в среде. Разложение электромагнитного поля по временным и пространственным гармоникам. Связь закона дисперсии с дисперсией диэлектрической восприимчивости и магнитной проницаемости. Показатели преломления и поглощения. Прозрачные среды. Литература: § 3-1.

Волновые пакеты – фазовая и групповая скорость, дисперсия. Понятие о волновом пакете, спектральная ширина волнового пакета. Плоской волновой пакет. Фазовая скорость. Групповая скорость. Огибающая волнового пакета. Вторая дисперсия. Сопровождающая система координат. Уравнение Шредингера на волновой пакет в лабораторной запаздывающей системе координат. Литература: § 3-3.

• **Задача 4:** Непосредственными вычислениями покажите, что неравенства (3.13c) на групповую скорость в изотропной прозрачной среде действительно следуют из общих неравенств (7.9f, 7.9g) на обобщённую восприимчивость, если взять $\alpha(\omega) = \varepsilon(\omega)\mu(\omega) - 1$ (рассмотрите случай, когда пространственная дисперсия у ε и μ отсутствует).

Домашнее задание

• **Задача 1:** Получите уравнение на огибающую в сопровождающей (движущейся) системе координат, в

которой одной из координат является $z_{\text{rel}} = z - v_g t$, а другой координатой — t .

• **Задача 2:** Пусть в начальный момент времени огибающая плоского волнового пакета в сопровождающей системе координат имела гауссову зависимость: $\Phi(z, t = 0) = \exp(-z^2/2\zeta^2)$, где ζ/v_g — длительность

импульса, v_g — групповая скорость. Найти дальнейшую эволюцию огибающей, если известна вторая дисперсия β_2 . Нарисовать график огибающей (действительной и мнимой частей, желательно компьютерной программой для выявления всех характерных особенностей кривых) при $t = 30\zeta^2/(v_g^3\beta_2)$ в интервале $z \in [-100\zeta, 100\zeta]$.

§2. Термодинамика и кинетика переменного электромагнитного поля в среде с линейным откликом

Поток энергии в электромагнитной волне; вектор Умова-Пойнтинга. Условие непрерывности потока энергии на границе раздела; связь этого условия с граничными условиями для уравнений Максвелла в среде. Выражение для потока энергии через комплексные амплитуды полей. Литература: § 3-7, а также [Ландау и Лифшиц, 1982, § 80].

Плотность энергии переменного электромагнитного поля; формула Бриллюэна. Запись выражения для плотности электромагнитной энергии через комплексные амплитуды. Условие применимости формулы Бриллюэна — малые потери.

• **Задача 1:** Показать, что в прозрачной диспергирующей среде для плоской монохроматической волны выполняется соотношение

$$v_g \bar{E} = \bar{S}, \quad (2)$$

где v_g — групповая скорость, $\bar{E}$ — средняя по времени плотность запасённой электромагнитной энергии,

$\bar{S}$ — среднее по времени абсолютное значение вектора Умова-Пойнтинга.

Тепловые потери при распространении электромагнитной волны. Запись выражения для объёмной плотности тепловых потерь через комплексные амплитуды полей. Выражение для полного количества выделившегося тепла для импульса конечной длительности.

• **Задача 2:** Показать, что в почти прозрачной диспергирующей среде для плоской монохроматической волны выполняется соотношение

$$\frac{\bar{S}}{\bar{Q}} = \frac{\lambda_0}{4\pi k}, \quad (3)$$

где $k = \text{Im} \sqrt{\epsilon\mu}$ — показатель поглощения среды (3.3b), λ_0 — длина волны в вакууме, а $\bar{Q}$ — средняя по времени объёмная плотность потерь волны, уходящих в тепло.

§3. Скин-эффект.

Граничные условия в форме Леонтовича позволяют решать задачу об отражении электромагнитных волн от поверхности тела, избегая рассмотрения того, что происходит внутри самого этого тела. Отражательные свойства поверхности характеризуются только поверхностным импедансом. Практическое применение этого подхода весьма обширно в электротехнике.

Скин-эффект: запись граничных условий в форме Леонтовича; условие применимости описания отражения волны от поверхности в терминах скин-эффекта. Связь тангенциальных компонент электрического и магнитных полей на границе оптически плотного материала. Глубина скин-слоя. Условие применимости локальной связи между полями: малая величина глубины проникновения в материал (длины волны в материале) по сравнению с длиной волны в окружающем пространстве и радиусом кривизны

поверхности. Принцип причинности для поверхностного импеданса; принцип причинности для обратного поверхностного импеданса. Физический смысл поверхностного импеданса: связь между электрическим полем и поверхностным током. Поток энергии в металл. Граничные условия на поверхности идеального металла.

Нормальный скин-эффект. Поверхностный импеданс. Глубина проникновения. Условия нормальности для скин-эффекта. Литература: § 4-2, а также [Ландау и Лифшиц, 1982, § 87].

Семинар

• **Задача 1:** Выразить поверхностный импеданс через диэлектрическую проницаемость ϵ и магнитную восприимчивость μ отражающего материала в случае нормального скин-эффекта. Связать между собой глу-

бину скин-слоя δ , частоту волны ω и поверхностный импеданс ζ .

• **Задача 2:** Вычислить закон дисперсии поверхностного импеданса для почти идеального металла, дисперсия проводимости которого соответствует модели Друде.

• **Задача 3:** Пользуясь непосредственно соотношением (4.5d), определите коэффициент отражения от поверхности металла для нормально падающей волны. Найдите мощность, уходящую в единицу поверхности металла, если амплитуда колебаний электрического поля в падающей волне равна E_0 .

• **Задача 4:** Определить коэффициент отражения от поверхности металла как функцию угла падения и поляризации, зная поверхностный импеданс металла.

• **Задача 5:** Определить площадь полезного сечения для проводов (цилиндрических прутков) диаметром $2a = 10$ см, сделанных из меди и из стали, по которым течёт переменный ток с частотой 50 Гц. Принять, что сопротивление меди равно $\sigma_{\text{Cu}} = 580$ ксим/см, магнитная восприимчивость $\mu_{\text{Cu}} = 1$, сопротивление стали $\sigma_{\text{Fe}} = 100$ ксим/см, магнитная восприимчивость стали $\mu_{\text{Fe}} = 1000$. *Указание:* Площадь полезного сечения S определим как

$$S = \frac{|I|}{I_0} \cdot \pi a^2, \quad (4)$$

где I — комплексная амплитуда тока, протекающего по всему сечению провода, $I_0 = \pi a^2 \sigma |\partial_z V|$ — величина постоянного тока, который бы протекал, если бы падение напряжения на единицу длины $\partial_z V$ было постоянным во времени.

Обсуждение области существования в частотном представлении нормального скин-эффекта для металла через рассмотрение кинетического уравнения Больцмана: длина свободного пробега должна быть

меньше чем масштаб, на котором изменяется электрическое поле, т.е. глубина проникновения. Литература: [Абрикосов, 1987, § 7.2].

Домашнее задание

Связь поверхностного импеданса с тепловым излучением Скорость излучения нагретой поверхности в пустоту.

• **Задача 1:** Определите полную интенсивность теплового излучения, производимую поверхностью металла, характеризующуюся поверхностным импедансом $\zeta(\omega)$ (предполагается предел $|\zeta| \ll 1$). Сначала найдите спектральную плотность интенсивности уходящего излучения в малый телесный угол $d\omega$, $dI_\omega/d\omega$. Затем найдите нормальную к поверхности металла компоненту этого потока энергии и проинтегрируйте по всем направлениям и частотам. При вычислении интеграла по углам пренебрегите поправками, малыми по ζ . При вычислении интеграла по частотам подставьте явную зависимость поверхностного импеданса от частоты, выраженную через статическую проводимость металла σ . Металл немагнитный, температура T (измеряется в эрг) мала по сравнению с частотой, на которой нормальный скин-эффект переходит в аномальный, кроме того $T \ll \hbar\sigma$ и $T \ll \hbar/\tau$, где τ — время релаксации электронов.

Указание: Пусть R — коэффициент отражения, $dI_\omega^b/d\omega$ (размерность эрг/см²) — величина, соответствующая чёрному излучению. Искомая величина есть $dI_\omega/d\omega = (1 - R)dI_\omega^b/d\omega$, это соотношение называется законом Кирхгофа. Телесный угол $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, где θ — угол между нормалью к поверхности и направлением распространения волны. Обратите внимание, что решение этой задачи, изложенное в [Ландау и Лифшиц, 1982], содержит ошибку.

§4. Волноводы с металлическими стенками

Распространение волн в полых волноводах с идеально проводящими стенками. Волноводы с односвязными полостями. Дисперсия мод, частота отсечки. Определение длины распространения мод в полых металлических волноводах с учётом потерь на стенках. Практическое применение волноводов. Выражение всех компонент полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ через компоненты, направленные вдоль оси волновода, E_z и H_z ; классификация мод. Достаточные граничные условия для ТМ- и ТЕ-волн. Получение дисперсионного соотношения, минимальная частота распространения. Конечность длины распространения мод: выражение коэффициента затухания через поверхностный

импеданс металла. Литература: § 5-3, а также [Ландау и Лифшиц, 1982, § 91], [Топтыгин, 2005, § 14.1].

Волноводы с круглым и прямоугольным поперечным сечениями. Поперечная структура мод, в частности, моды с минимальной частотой отсечки.

• **Задача 1:** Найти возможные типы волн в круглом волноводе радиуса a , считая его стенки идеально проводящими. Определить граничную частоту ω_0 для такого волновода. Найти коэффициенты затухания α разных типов волн в случае, если поверхностный импеданс стенок равен ζ . Литература: Пункт 5-3.4.2, а также [Топтыгин, 2005, стр. 628, задачи 14.12 и 14.13].

Двухжильные волноводы. Существование в волноводе с двумя металлическими жилами в пределе идеального металла полностью поперечной моды, не имеющей частоты отсечки. Ёмкость, индуктивность и волновое сопротивление линии; условие согласования нагрузки за волноводом. *Литература:* § 5-4.

Коаксиальный волновод. Рассмотрение коаксиального волновода на языке уравнений Максвелла. Описание коаксиального волновода в терминах линии Лехера: погонные ёмкость и индуктивность волновода, волновое уравнение на напряжение и ток. Эквивалентность описания моды в терминах уравнений Максвелла и линии Лехера. *Литература:* § 5-4, а также [Ландау и Лифшиц, 1982, § 91], [Сивухин, 2004, § 143], [Kuphaldt, 2007, Ch. 14].

• **Задача 2:** Найти погонную ёмкость (ёмкость на единицу длины) для цилиндрического конденсатора. Внутренняя обкладка имеет внешний радиус a , внешняя обкладка имеет внутренний радиус b . Пространство между обкладками заполнено средой с диэлектрической проницаемостью ε .

• **Задача 3:** Найти погонную ёмкость (ёмкость на единицу длины) C для конденсатора, образованного двумя параллельными металлическими стержнями круглого сечения. Радиус обоих стержней равен a , расстояние между их осями равно b . Пространство между проводами заполнено средой с диэлектрической проницаемостью ε . Отдельно рассмотреть пределы далеко разнесённых стержней $b \gg a$ и почти касающихся стержней, когда расстояние между их поверхностями $d = b - 2a \ll a$.

• **Задача 4:** Учесть затухание сигнала в коаксиальном волноводе за счёт потерь в скин-слое и вычис-

лить длину l распространения главной моды. Внутренний радиус коаксиального волновода равен a , внешний — b , частота сигнала — ω , поверхностный импеданс металла — ζ , диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость материала между жилами равны ε и μ .

Домашнее задание

• **Задача 1:** Исследовать ТЕ- и ТМ-моды, имеющие наиболее низкие частоты отсечки в волноводе с круглым поперечным сечением радиуса a , считая его стенки идеально проводящими. **а)** Определить частоты отсечки ω_c для этих мод. Нарисовать пространственную структуру проекции электрического и магнитного полей на поперечную плоскость. **б)** Найти длины распространения ℓ для каждой из этих мод (численное выражение для коэффициента перед a/ζ'), если поверхностный импеданс стенок равен $\zeta \ll 1$, а частоты сигналов в каждой из мод в $\alpha = 2$ раза больше соответствующей частоты отсечки. *Литература:* Пункт 5-3.4.2.

• **Задача 2:** Рассмотрим коаксиальный провод (SAT 703): Обе жилы линии сделаны из меди, диаметр центральной жилы равен $a = 1.13$ мм, внутренний диаметр обмотки (вторая жила) равен $b = 4.8$ мм. Пространство между жилами заполнено вспененным полиэтиленом, у которого диэлектрическая проницаемость (частота сигнала 2 ГГц) равна $\varepsilon = 1.6$. Найдите волновое сопротивление (в омах), погонные ёмкость C и индуктивность L . Учтя потери, найдите длину распространения сигнала l . Поверхностное сопротивление (см. (4.5f, 4.5h)) меди при указанной частоте равно $R_s = 0.011$ Ом. Чему равна величина ζ' в (4.5f)?

§5. Диэлектрические волноводы

Связанные моды в плоских волноводах. Классификация связанных мод в плоском волноводе, ТЕ- и ТМ-волны. Разделение ТЕ-мод на чётные и нечётные, структура поля и собственные значения. Отсутствие частоты отсечки для чётной ТЕ-моды низшего порядка. *Литература:* § 5-5, а также [Маркузе, 1974, § 8.3].

Плоские диэлектрические волноводы: ТЕ- и ТМ-моды. Количество направленных мод при фиксированной частоте, фундаментальные моды.

• **Задача 1:** Пусть разница показателей преломления сердцевины и обкладок волновода мала,

$$\Delta = \varepsilon - 1 \ll 1,$$

но волновод не обязательно является тонким. Найдите в главном порядке по Δ разницу постоянных распространения $\delta\beta = \beta_{TM} - \beta_{TE}$ симметричных ТЕ- и ТМ-мод.

Указание: Считайте, что $\beta_{TE} \equiv \beta$ известно как решение (5.17i); ответ для δp выразите в терминах p, V , ответ для $\delta\beta$ выразите в терминах k, β, q, κ, a (но не p), избавившись в обоих случаях от тригонометрии. Задачу решите двумя способами: путём вычитания с последующей линеаризацией по малым $\delta p, \Delta$ уравнений (5.17h, 5.18g), и путём квантовомеханической теории возмущений, когда невозмущённой частью уравнения (5.18a) на структуру ТМ-моды принимается уравнение на структуру ТЕ-моды (5.17b).

• **Задача 2:** Рассмотрите моды в плоском симметричном волноводе, не имеющие частоты обрезки. Определите пространственную структуру электромагнитного поля и вектора поляризации для предела, когда моды являются слабо-связанными.

Цилиндрический волновод. Волноводы со сту-

печным радиальным профилем показателя преломления. *Классификация мод.* Ступенчатый радиальный профиль показателя преломления; V -параметр. *Литература:* § 5-6, а также [Маркузе, 1974, Гл.8].

• **Задача 3:** В аксиально-симметричном волноводе найти частоту отсечки для аксиально-симметричных мод (имеющие аксиальное число $\nu = 0$). Выразить эту частоту отсечки в терминах V -параметра (5.20с), $V = z$. При $V < z$ в волноводе возможно распространение только фундаментальной моды. Покажите, что аксиально-симметричные моды являются либо ТЕ-, либо ТМ-модами.

Оптическое волокно. Приближение слабо-ведущего волновода. Линейно-поляризованные моды. Фундаментальная мода в аксиально-симметричном диэлектрическом волноводе в приближении слабо-ведущего волновода. Оптическое волокно: физические характеристики, фундаментальная мода. *Литература:* § 5-7, а также [Снайдер и Лав, 1987].

Домашнее задание

• **Задача 1:** Рассмотрите моды в плоском симметричном волноводе, имеющие высокий номер. Как структура таких мод описывается в квази-классическом приближении? Используя правило Бора-Зоммерфельда, покажите, что параметр V (5.17g) действительно определяет, сколько имеется направленных мод в волноводе при фиксированной частоте.

• **Задача 2:** Для одномодового оптического волокна с физическими параметрами (5.29) определить безразмерный параметр V (5.20с).

• **Задача 3:** Исходя из квази-классического приближения показать, что оценка для количества направленных мод N_{modes} (5.20d) в аксиально симметричном волноводе со ступенчатым радиальным профилем показателя преломления действительно справедлива. *Указание:* при подсчёте количества доступных состояний учесть требование полного внутреннего отражения для поля связанной волны внутри сердцевинки и воспользоваться правилом квантования Бора-Зоммерфельда.

• **Задача 4:** Для аксиально симметричного волновода со ступенчатым радиальным профилем в пределе малого изменения показателя преломления выяснить (параметры даны в абзаце с формулой (5.29)), можно ли описывать дисперсию фундаментальной моды приближённым уравнением (5.28r).

• **Задача 5:** Пусть распределение диэлектрической проницаемости в оптическом волокне имеет ступенчатый вид. У оптического волокна имеется слабая асимметрия,

так что поперечное сечение сердцевинки имеет не строго круглую форму, а эллиптическую с малым эксцентриситетом $e = 0.03$. Средний радиус сердцевинки равен $a = 4.5$ мкм, коэффициент преломления $n = 1.48$, а разность $\Delta = 0.004$ (5.20b), на несущей частоте сигнала длина волны в пустоте $\lambda_0 = 1.5$ мкм. Отталкиваясь от вида поправки к скорости распространения (5.30j), оцените длину L_{BL} , на которой одна поляризация обгоняет другую на одну длину волны. *Указание:* Сначала установите функциональную зависимость L_{BL} от параметров оптического волокна, потом произведите численный расчёт.

• **Задача 6:** Рассмотрите работу дифракционной решётки с узким спектром отражения в волноводе. Дифракционная решётка представляет собой слабую периодическую модуляцию диэлектрической проницаемости, так что в области $0 < z < L$

$$\varepsilon = \varepsilon_0(x, y) + \delta\varepsilon(x, y) \sin(2pz)$$

с $\delta\varepsilon \ll 1$, где $2\pi/p$ — период модуляции решётки. Эффективным уравнением на распространение моды на фоне дифракционной решётки является

$$(\partial_z^2 + q^2)E = 0, \quad q^2(z) = \beta^2(1 + \epsilon \sin(2pz)) \quad (5)$$

с безразмерным параметром $\epsilon \ll 1$, принимающим постоянное значение в области $0 < z < L$. Положим, что сигнал налетает на дифракционную решётку слева. Найдите коэффициент отражения r сигнала на частоте ω , считая, что $\beta(\omega)$ близко к p . *Указание:* Перейдите от электрического поля E к полям

$$\Psi_{\pm} = \frac{E \mp i\partial_z E/q}{2},$$

описывающим распространяющиеся вправо и влево волны. Получите систему линейных дифференциальных уравнений на поля $\Psi_{\pm}$. Затем сделайте разложение по малому параметру ϵ , удержите только резонансные члены и получите замкнутое уравнение второго порядка на амплитуду распространяющейся вправо волны Ψ_+ .

• **Задача 7:** Пусть распределение диэлектрической проницаемости в оптическом волокне имеет ступенчатый вид. У оптического волокна имеется слабая асимметрия, так что поперечное сечение сердцевинки имеет не строго круглую форму, а эллиптическую с малым эксцентриситетом $e = 0.03$. Средний радиус сердцевинки равен $a = 4.5$ мкм, коэффициент преломления $n = 1.48$, а разность $\Delta = 0.004$ (5.20b), на несущей частоте сигнала длина волны в пустоте $\lambda_0 = 1.5$ мкм. Отталкиваясь от вида поправки к скорости распространения (5.30j), оцените длину L_{BL} , на которой одна поляризация обгоняет другую на одну длину волны. *Указание:* Сначала установите функциональную зависимость L_{BL} от параметров оптического волокна, потом произведите численный расчёт.

§6. Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах.

Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах. Сечения рассеяния, поглощения и взаимодействия. Оптическая теорема.

Асимптотический вид электромагнитного поля вдали от рассеивающего тела: понятие амплитуды рассеяния; парциальные амплитуды рассеяния. Сечения взаимодействия, поглощения и рассеяния. Связь сечения рассеяния с амплитудой рассеяния. Оптическая теорема. Литература: § 4-3, а также [Топтыгин, 2005, стр. 480, Задача 12.77].

Рассеяние на малом шаре субволнового диаметра. Оценки по порядку величины для амплитуд рассеяния и поглощения. Предел идеального металла. Резонансное рассеяние на мелких частицах. Литература: §§ 4-4, 4-5.

• **Задача 1:** Вычислить сечения поглощения σ_a и рассеяния σ_s монохроматической электромагнитной волны на металлическом шаре, размер которого a мал по сравнению с глубиной скин-слоя, $a \ll \delta$, полагая, что частота падающей волны ω близка к резонансной частоте дипольной поверхностной плазмонной моды шарика. Литература: §4-4.

Рассеяние света на коллоиде мелких частиц. Эффект просветления. Рассеяние и прохождение белого света на коллоидном растворе частиц — независимость сечения взаимодействия от добротности резонанса и зависимость от неё сечения рассеяния.

• **Задача 2:** Покажите, что в плазмонном резонансе на малой металлической грануле средняя энергия колебаний, запасённая в электрическом поле, равна средней кинетической энергии электронов. Используйте общее выражение (2.6) для поляризуемости шара в электрическом поле (т.е., пренебрегите потерями на излучение) и модель Друде (5.32a) для диэлектрической проницаемости металла в пределе малых потерь.

• **Задача 3:** Определите погонную плотность дипольной поляризуемости для стержня кругового сечения. Электрическое поле направлено поперёк оси стержня. Диэлектрическая проницаемость материала стержня равна ϵ .

Магнито-дипольный резонанс на диэлектрической частице сферической формы. Условие резонанса, его добротность. Магнито-дипольная восприимчивость частицы с размером, малым по сравнению с длиной волны в материале. Литература: пункт 4-5.1.

Домашнее задание

• **Задача 1:** Вычислить сечение поглощения σ_a монохроматической электромагнитной волны проводящим шаром с малым поверхностным импедансом $\zeta = \zeta' + i\zeta''$. Радиус шара a мал по сравнению с длиной волны λ , но велик по сравнению с глубиной скин-слоя δ , $\delta \ll a \ll \lambda$.

• **Задача 2:** Пусть известна формула (4.26a) для магнито-дипольной восприимчивости малой сферической диэлектрической частицы далеко от резонансов. Рассмотрим первый резонанс, определяемый равенством $nka = \pi$ (4.27b). Примем, что в материале частицы нет потерь вблизи этой частоты. Используя общую теорию для резонансного поведения рассеяния на мелких частицах, см. § 4-4 и, в частности, выражение (4.21h) для поляризуемости в резонансе, установите поведение поляризуемости диэлектрического шарика вблизи рассматриваемого резонанса.

• **Задача 3:** Рассмотрим гранулу сферической формы радиуса a , находящуюся в вакууме и имеющую температуру T . Радиус гранулы мал на частоте $\omega_T = T/\hbar$, соответствующей температуре, $\sqrt{\epsilon}ka \ll 1$, при этом задана дисперсия диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega)$ материала частицы, а его магнитная восприимчивость равна единице (предполагается, что радиус гранулы всё же достаточно велик для того, чтобы возможно было пользоваться приближением локальной связи между электрическим полем и плотностью тока). Найти в общем виде интенсивность теплового излучения гранулы на частоте, выразив её через $\epsilon(\omega)$. Чему равна характерная частота излучения, какой приближённый вид принимает диэлектрическая проницаемость на этой частоте? Найти полную интенсивность излучения для модели Друде, в которой статическая проводимость металла равна σ . Металл немагнитный, температура T (измеряется в эрг) мала по сравнению с частотой, на которой нормальный скин-эффект переходит в аномальный, кроме того $T \ll \hbar\sigma$ и $T \ll \hbar/\tau$, где τ — время релаксации электронов.

Указание: Найдите гамильтониан взаимодействия между полем электромагнитной волны и дипольным моментом гранулы, имеющим общий вид (7.1a). Затем, чтобы вычислить тепловую амплитуду колебаний электро- и магнито-дипольного моментов гранулы воспользуйтесь флуктуационно-диссипационной теоремой (7.17f) (для определения интенсивности излучения из квадрата амплитуды колебаний надо вычесть квадрат амплитуды квантовых флуктуаций при нулевой температуре). В соответствии с условием задачи, следует считать длину волны большой по сравнению с размером гранулы.

§7. Электростатика

Уравнение электростатики. Элементарные электростатические задачи: шар в однородном поле. Двумерная электростатика: погонные ёмкости цилиндрического конденсатора и двух параллельных проводов. *Литература:* § 2-1.

Тела эллипсоидальной формы во внешнем однородном электрическом поле. Тензор дипольной поляризуемости тела эллипсоидальной формы. Факторы деполяризации. *Эллипсоиды вращения.* Момент сил, действующий на аксиально-симметричный эллипсоид во внешнем однородном электрическом поле. Фактор деполяризации для сильно вытянутого эллипсоида вращения. *Литература:* § 2-2, а также [Ландау и Лифшиц, 1982, §8].

Сильно удлинённое тело. Описание поляризации сильно удлинённого тела вращения в постоянном продольном электрическом поле с логарифмической точностью. Применение к сильно вытянутому эллипсоиду; распределение поля вокруг него – вблизи кончика, у боковых сторон и вдалеке. *Литература:* Пункт 2-2.2.

• **Задача 1:** Найти с логарифмической точностью распределение поля вокруг удлинённого эллипсоида вращения (полуоси $b \gg a, a$), сделанного из материала с диэлектрической проницаемостью ε и помещённого во внешнее постоянное электрическое поле, направленное вдоль его оси вращения. Найти зависимость поля i) на расстояниях $a < r_{\perp} \ll b$ от оси вращения и $r < b$ от центра эллипсоида; ii) на расстояниях $r \gg b$ от центра эллипсоида. *Указание:* на близких расстояниях удобно

сначала найти электростатический потенциал. *Литература:* § 2-2

Домашнее задание

• **Задача 1:** Определите сечение рассеяния электромагнитной волны с частотой $f = 1$ МГц на стеклянном эллипсоиде вращения (диэлектрическая проницаемость стекла на этой частоте $\varepsilon = 3.75$). Волна линейно поляризована. Главная ось эллипсоида лежит в плоскости, ортогональной направлению распространения волны и повернута на угол $\phi = \pi/6$ относительно направления электрического поля волны. Длина главной полуоси эллипсоида равна $b = 2$ см, длина малой полуоси равна $a = 1$ см. *Указание:* Введите декартову систему координат $Oxyz$, у которой ось Oz сонаправлена волновому вектору падающей волны, а ось Ox направлена по главной оси эллипсоида.

• **Задача 2:** Найти с логарифмической точностью распределение поля вокруг удлинённого металлического эллипсоида вращения (полуоси $b \gg a, a$), помещённого во внешнее постоянное электрическое поле, направленное вдоль его оси вращения. Найти зависимость поля i) на расстояниях $a < r_{\perp} \ll b$ от оси вращения и $r < b$ от центра эллипсоида; ii) на расстояниях $r \gg b$ от центра эллипсоида. *Указание:* на близких расстояниях удобно сначала найти электростатический потенциал, используя обобщённую соответствующим образом (2.9e) и (2.9j). *Литература:* § 2-2

Контрольная

Глава 1

НЕПРЕРЫВНАЯ СРЕДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

§1-1. Уравнения Максвелла в среде

Напомним, что уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{tot}}, \quad (1.6a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \quad (1.6b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi \rho_{\text{tot}}, \quad (1.6c)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0. \quad (1.6d)$$

Здесь $\mathbf{e}$ – напряжённость электрического поля, $\mathbf{b}$ – напряжённость магнитного поля, ρ_{tot} – плотность электрического заряда, а $\mathbf{j}_{\text{tot}}$ – плотность электрического тока. Уравнения (1.6a-1.6d) называются “уравнениями Максвелла в пустоте”. “В пустоте” не означает, что нет зарядов и токов, а означает, что эти заряды и токи находятся на фоне вакуума, т.е. “пустоты”.

1-1.1 Разделение на составляющие плотностей заряда и тока.

С точки зрения теории непрерывной среды, поля, фигурирующие в (1.6), называются микроскопическими. Эти поля сильно флуктуируют на атомных масштабах, которые находятся за пределами области применения теории непрерывной среды. Эта теория имеет дело с расстояниями, большими по сравнению с меж-атомными. Наша ближайшая цель – переписать микроскопические уравнения Максвелла, усреднив их по масштабам, большим по сравнению с меж-атомными. Для этого, в частности, надо разделить полный заряд и полный ток на составляющие согласно их физическому происхождению.

Под действием проникшего в среду электромагнитного поля в ней начинают циркулировать токи. Величины этих токов определяется самим электромагнитным полем и свойствами среды. В среде могут быть и посторонние заряды, которые при движении также создают электрический ток. Происхождение посторонних зарядов определяется не свойствами среды, а внешними условиями. В соответствии с этим физическим пониманием разделим заряды и токи на заряды и токи, которые являются результатом отклика среды на элек-

тромагнитное поле, и на внешние заряды и токи:

$$\rho_{\text{tot}} = \rho + \rho_{\text{ext}}, \quad \mathbf{j}_{\text{tot}} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{ext}}, \quad (1.7a)$$

где индекс ‘ext’ означает внешние источники.

1-1.1.1 Плотность заряда ρ

Ненулевая плотность зарядов ρ , появляющихся при отклике среды на электромагнитное поле, означает, что среда под действием электромагнитного поля приобретает ненулевую поляризацию. Поэтому мы вводим переобозначение

$$\rho \equiv \rho_p. \quad (1.7b)$$

Вследствие изначальной электро-нейтральности среды интеграл по объёму от величины ρ_p равен нулю,

$$\int d^3r \rho_p = 0. \quad (1.7c)$$

1-1.1.2 Разделение плотности тока $\mathbf{j}$ на составляющие

Электрический ток $\mathbf{j}$, в отличие от поляризационных зарядов ρ_p , имеет более сложную структуру. Дело в том, что некоторая часть тока среды $\mathbf{j}$ является чисто соленоидальной и не приводит к появлению поляризационных зарядов, но приводит, с другой стороны, к возбуждению дополнительного магнитного поля. Выделим в электрическом токе два вклада:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_m. \quad (1.7d)$$

Первый вклад $\mathbf{j}_p$ в (1.7d) появляется из-за движения поляризационных зарядов. Введём вектор поляризованности $\mathbf{P}$, который задаёт дипольный момент единицы объёма среды. Поле $\mathbf{P}$ связано с плотностью ρ_p и током $\mathbf{j}_p$ уравнениями

$$\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \partial_t \mathbf{P} = \mathbf{j}_p. \quad (1.7e)$$

Второй вклад $\mathbf{j}_m$ в (1.7d) возникает из-за движения зарядов внутри атомов или элементарных ячеек среды. Природа $\mathbf{j}_m$ отличается от $\mathbf{j}_p$ тем, что в $\mathbf{j}_m$ вносит

вклад орбитальное движение электронов в элементарных ячейках. В токе $\mathbf{j}_m$ нет дивергентной составляющей, поскольку дивергентную составляющую мы выделили в токе $\mathbf{j}_p$. Поэтому ток $\mathbf{j}_m$ представляется в виде

$$\mathbf{j}_m = c \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (1.7f)$$

Если ограничиться этим определением величины $\mathbf{M}$, то она оказывается не полностью зафиксированной, поскольку к ней можно добавить градиент любой скалярной величины при неизменном токе $\mathbf{j}_m$. Удобно зафиксировать $\mathbf{M}$, положив эту величину равной магнитному моменту единицы объёма. Это становится осмысленным, если понимать материальные уравнения в усреднённом смысле, а именно, на масштабах много больших размера ячейки среды.

Отметим, что в общем случае разделение тока среды (1.7d) является неоднозначным с математической точки зрения. Поэтому при произведении разделения (1.7d) надо пользоваться физическими соображениями.

1-1.1.3 Материальные уравнения Максвелла

Теперь усредним поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ на расстояниях, много больших межатомного расстояния в среде. Введём *электрическое поле $\mathbf{E}$, поле электрической индукции $\mathbf{D}$, магнитное поле $\mathbf{H}$ и поле магнитной индукции $\mathbf{B}$* согласно равенствам

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \langle \mathbf{e} \rangle, & \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi \langle \mathbf{P} \rangle \\ \mathbf{B} &= \langle \mathbf{b} \rangle, & \mathbf{H} &= \mathbf{B} - 4\pi \langle \mathbf{M} \rangle. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Угловые скобки обозначают усреднение по расстояниям, иного большим межатомных. В дальнейшем под $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ мы будем понимать усреднённые $\langle \mathbf{P} \rangle$ и $\langle \mathbf{M} \rangle$, в таком случае эти поля называются *вектором поляризации* и *вектором намагниченности* соответственно. Тогда уравнения Максвелла в пустоте (1.6) можно переписать в виде уравнений Максвелла в среде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ext}} \quad (1.9a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.9b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\text{ext}} \quad (1.9c)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.9d)$$

Величину $\partial_t \mathbf{D}/4\pi$ называют *током смещения*. К уравнениям (1.9) нужно добавить связь между полями $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, иначе нет выгоды от произведённого разделения зарядов и токов.

1-1.2 Граничные условия

Пусть есть граница раздела, на которой меняются скачком свойства среды. Кроме того, вдоль границы разде-

ла может течь поверхностный ток $\mathbf{i}_{\text{ext}}$, и на ней может находиться ненулевая поверхностная плотность заряда σ_{ext} : эти величины являются частями величин $\mathbf{j}_{\text{ext}}$ и ρ_{ext} соответственно, сконцентрированными на поверхности раздела. Обозначим единичную нормаль к поверхности $\mathbf{n}^i$. Примем соглашение, что нормаль $\mathbf{n}$ направлена из среды с номером 1 в среду с номером 2. Разность значения произвольной величины f на разных сторонах границы раздела, а именно разность “2 – 1”, будем обозначать как $[f]$. Тогда из уравнений (1.9) следует

$$\text{from eq. (1.9a):} \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}_{\text{ext}}, \quad (1.10a)$$

$$\text{from eq. (1.9b):} \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = 0, \quad (1.10b)$$

$$\text{from eq. (1.9c):} \quad [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D})] = 4\pi \sigma_{\text{ext}}, \quad (1.10c)$$

$$\text{from eq. (1.9d):} \quad [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})] = 0. \quad (1.10d)$$

Нормальная компонента магнитной индукции B_n и касательные компоненты электрического поля $\mathbf{E}_t$ остаются непрерывными на границе раздела. Скачок нормальной компоненты электрической индукции D_n определяется плотностью поверхностного заряда σ_{ext} , а скачок касательных компонент магнитного поля $\mathbf{H}_t$ определяется поверхностным током $\mathbf{i}_{\text{ext}}$.

1-1.3 Гамильтониан тела во внешнем электромагнитном поле

Для того, чтобы в дальнейшем изучать термодинамику образцов в присутствии электромагнитного поля, переформулируем уравнения Максвелла в формализме Гамильтона. Знание гамильтониана позволит нам ввести свободную энергию F , а вслед за ней и все остальные термодинамические потенциалы.

Положим, что мы изучаем поведение некоторого тела, помещённого во внешнее электромагнитное поле. Этот образец описывается гамильтонианом $\hat{\mathcal{H}}(A^\mu)$, где $A^\mu(\mathbf{r}, t)$ – 4-потенциал электромагнитного поля. Электромагнитное поле создаётся как внешними источниками, имеющими плотность зарядов ρ_{ext} и плотность тока $\mathbf{j}_{\text{ext}}$, так и зарядами и токами в самом образце.

Полный гамильтониан системы, состоящей из исследуемого образца и электромагнитного поля, возбуждаемого источниками, складывается из трёх частей:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}} = \hat{\mathcal{H}}(A^\mu) + \hat{\mathcal{H}}_f + \hat{\mathcal{H}}_{f,\text{ext}}. \quad (1.11a)$$

В (1.11a) гамильтониан исследуемого образца в электромагнитном поле би-линеен по операторам рождения и уничтожения частиц,

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_a \int d^3r \hat{\Psi}_a^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\mathcal{H}}_a(\mathbf{r}; A^\mu) \hat{\Psi}_a(\mathbf{r}), \quad (1.11b)$$

где $\hat{\Psi}_a(\mathbf{r})$ – оператор уничтожения частицы сорта a в точке $\mathbf{r}$, а локальная плотность гамильтониана для частиц сорта a

$$\hat{\mathcal{H}}_a(\mathbf{r}; \hat{A}^\mu) = \frac{1}{2m_a} \left(\hat{\mathbf{p}}_a - \frac{e_a}{c} \mathbf{A}_a \right)^2 + e_a \varphi_a - (\hat{\boldsymbol{\mu}}_a \mathbf{B}_a), \quad (1.11c)$$

где $\hat{\mathbf{A}}_a$, $\hat{\mathbf{B}}_a$ и φ_a означают локальные значения вектор-потенциала, магнитного поля и скалярного потенциала в точке положения частицы a . Шляпки над этими величинами означают, что электромагнитное поле само является функцией состояния исследуемой системы. Далее, гамильтониан собственно электромагнитного поля есть

$$\hat{\mathcal{H}}_f = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 - 2\varphi \operatorname{div} \mathbf{E} \right). \quad (1.11d)$$

Наконец, часть гамильтониана, отвечающая за возбуждение внешними источниками электромагнитного поля, имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_{f,\text{ext}} = \int d^3r \left(\varphi \rho_{\text{ext}} - \frac{1}{c} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_{\text{ext}}) \right). \quad (1.11e)$$

Каноническими переменными электромагнитного поля являются компоненты 4-потенциала $\|\varphi, \mathbf{A}\|$. Канонический импульс, сопряжённый векторному потенциалу $\mathbf{A}$, пропорционален электрическому полю и равен $-\mathbf{E}/(4\pi c)$. Канонический импульс, сопряжённый скалярному потенциалу, равен нулю.

1-1.3.1 Уравнения Максвелла

Уравнения Гамильтона для электромагнитного поля получаются в результате вариации полного гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}}$ (1.11a)

$$\partial_t \mathbf{E} = 4\pi c \frac{\delta \hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}}}{\delta \mathbf{A}}, \quad (1.11f)$$

$$\partial_t \mathbf{A} = -4\pi c \frac{\delta \hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}}}{\delta \mathbf{E}}, \quad 0 = 4\pi c \frac{\delta \hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}}}{\delta \varphi}. \quad (1.11g)$$

Уравнения (1.11f, 1.11g) следует рассматривать как определения, которые оправдываются тем, что воспроизводят уравнения Максвелла. Проверим это, выразив в выражении для гамильтониана магнитное поле через вектор-потенциал, $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. В первом уравнении (1.11f) вариация частей $\hat{\mathcal{H}}$ (1.11b) и $\hat{\mathcal{H}}_{f,\text{ext}}$ (1.11e) полного гамильтониана

$$\frac{\delta \hat{\mathcal{H}}}{\delta \mathbf{A}} + \frac{\delta \hat{\mathcal{H}}_{f,\text{ext}}}{\delta \mathbf{A}} = -\frac{\hat{\mathbf{j}} + \mathbf{j}_{\text{ext}}}{c} \equiv -\frac{\mathbf{j}_{\text{tot}}}{c} \quad (1.11h)$$

даёт полный электрический ток, а вариация оставшейся части гамильтониана есть

$$\frac{\delta \hat{\mathcal{H}}_f}{\delta \mathbf{A}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\int d^3r (\mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \delta \mathbf{A})}{\delta \mathbf{A}} = \frac{\operatorname{rot} \mathbf{B}}{4\pi}. \quad (1.11i)$$

Уравнения (1.11h, 1.11i) вместе с (1.11a), будучи подставленными в (1.11f), приводят к уравнению Максвелла (1.6a):

$$\partial_t \mathbf{E} = -4\pi \hat{\mathbf{j}} + c \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (1.11j)$$

Вариация гамильтониана по электрическому полю (1.11g) сводится к выражению электрического поля через 4-потенциал,

$$\partial_t \mathbf{A} = -4\pi c \frac{\delta \mathcal{H}_f}{\delta \mathbf{E}} = -c \mathbf{E} - \operatorname{grad} \varphi. \quad (1.11k)$$

Если взять ротор от этого выражения, мы придём к уравнению Максвелла (1.6b). Вариация гамильтониана по потенциалу (1.11g) расписывается в виде

$$0 = \frac{\delta(\hat{\mathcal{H}}_{\text{body}} + \hat{\mathcal{H}}_{f,\text{ext}})}{\delta \varphi} + \frac{\delta \hat{\mathcal{H}}_f}{\delta \varphi} = \hat{\rho} + \rho_{\text{ext}} - \frac{\operatorname{div} \mathbf{E}}{4\pi}, \quad (1.11l)$$

то есть приводит к уравнению Максвелла (1.6c) на плотность заряда,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho_{\text{tot}}. \quad (1.11m)$$

§1-2. Термодинамика тела в статическом электромагнитном поле

Используя обозначения Пункта 1-1.3, рассмотрим состояние теплового равновесия, когда, в частности, внешние источники ρ_{ext} и $\mathbf{j}_{\text{ext}}$ постоянны во времени. Будем пренебрегать тепловым возбуждением электромагнитных волн и вариацией во времени электромагнитного поля, связанного с тепловым движением зарядов. Тогда полное электрическое поле в статистическом равновесии становится стационарным и потому чисто потенциальным,

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (1.12a)$$

поскольку вихревая его часть всегда нестационарна, см. (1.11k).

Статистические свойства системы описываются распределением Гиббса, в котором в качестве гамильтониана выступает полный гамильтониан системы $\hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}}$ (1.11a), включающей в себя гамильтониан самой системы и электромагнитного поля, индуцированного внешними источниками. Свободная энергия F для такой системы является, с одной стороны, формально функцией электрического потенциала φ и векторного потенциала $\mathbf{A}$, реально же — функцией физических полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. А с другой стороны, F есть функция внешних источников

ρ_{ext} и $\mathbf{j}_{\text{ext}}$. Таким образом,

$$F(\mathbf{E}, \mathbf{B}; \rho_{\text{ext}}, \mathbf{j}_{\text{ext}}) = -T \ln \left\langle \exp \left(-\frac{\hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}}}{T} \right) \right\rangle, \quad (1.12b)$$

где усреднение $\langle \dots \rangle$ производится по распределению Гиббса при фиксированном распределении электромагнитного поля и конфигурации источников. Если пренебречь тепловыми флуктуациями, то реальное распределение электромагнитного поля соответствует экстремуму свободной энергии, т.е. определяется уравнениями

$$\frac{\delta F}{\delta \varphi} = \hat{\rho} + \rho_{\text{ext}} - \frac{\text{div } \mathbf{E}}{4\pi} = 0 : \quad \text{div } \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\text{ext}}, \quad (1.12c)$$

$$\frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}} = -\frac{\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{ext}}}{c} + \frac{\text{rot } \mathbf{B}}{4\pi} = 0 : \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ext}}. \quad (1.12d)$$

Правое уравнение (1.12c) следует из (1.11m) с учётом определение поля электрической индукции (1.8). Условие (1.12d) равенства нулю вариации свободной энергии по векторному потенциалу эквивалентно условию равенства нулю её вариации по полю магнитной индукции $\mathbf{B}$; правое уравнение (1.12d) следует из стационарной версии уравнения Максвелла (1.11j) с учётом определения магнитного поля $\mathbf{H}$ (1.8).

В статике выражение для полного гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}}$ возможно упростить. Сперва определим поля и потенциалы, создаваемые только внешними источниками:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{\text{ext}} &= -4\pi \rho_{\text{ext}}, \quad \mathbf{E}_{\text{ext}} = -\text{grad } \varphi_{\text{ext}}, \\ \text{rot rot } \mathbf{A}_{\text{ext}} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ext}}, \quad \mathbf{B}_{\text{ext}} = \text{rot } \mathbf{A}_{\text{ext}}. \end{aligned} \quad (1.12e)$$

В отсутствии тела свободная энергия внешних зарядов и токов равна

$$\begin{aligned} F_{\text{ext}} &= \mathcal{H}_f + \mathcal{H}_{f,\text{ext}} = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\mathbf{E}_{\text{ext}}^2 - \mathbf{B}_{\text{ext}}^2). \end{aligned} \quad (1.12f)$$

Обратим внимание, что под интегралом в (1.12f) стоит плотность лагранжиана для электромагнитного поля. Выразим теперь электрическое поле через потенциал в выражении для гамильтониана полной системы:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}} &= \hat{\mathcal{H}}(\varphi, \mathbf{A}) + \int d^3r \left(\frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} \right) + \\ &+ \int d^3r \left(\varphi \rho_{\text{ext}} - \frac{1}{c} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_{\text{ext}}) \right), \end{aligned} \quad (1.12g)$$

Разумеется, вариация этого гамильтониана по потенциалу по-прежнему нас приводит к статическому уравнению на электрический потенциал (1.11m). С учётом определений (1.12e) гамильтониан можно переписать в

виде

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}} = \hat{\mathcal{H}}(\varphi, \mathbf{A}) + \quad (1.12h)$$

$$+ \int d^3r \left(\frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}_{\text{ext}}}{4\pi} \right) - \int d^3r \left(\frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{E} \mathbf{E}_{\text{ext}}}{4\pi} \right).$$

Фиксированное распределение зарядов и токов вокруг исследуемого тела. Найдём вариацию свободной энергии (1.12b) по источникам, используя найденные выражения для полного гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}}$ (1.12g, 1.12h). Её можно переписать в следующих видах:

$$\begin{aligned} \delta F(\mathbf{E}, \mathbf{B}; \rho_{\text{ext}}, \mathbf{j}_{\text{ext}}) &= \delta \mathcal{H}_{\text{ext}} = \\ &= \int d^3r \left(\varphi \delta \rho_{\text{ext}} - \frac{1}{c} \mathbf{A} \delta \mathbf{j}_{\text{ext}} \right) = \\ &= \int d^3r \left(\frac{\mathbf{E} \delta \mathbf{D}}{4\pi} - \frac{\mathbf{B} \delta \mathbf{H}}{4\pi} \right). \end{aligned} \quad (1.12i)$$

При выводе второго выражения мы пользовались уравнениями Максвелла в статике (1.12c, 1.12d).

Свободная энергия F_{ext} (1.12f) является не зависящей от факта существования образца величиной в том смысле, что полное поле является прямой суммой

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_P + \mathbf{E}_{\text{ext}}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_M + \mathbf{B}_{\text{ext}}, \quad (1.12j)$$

где поля $\mathbf{E}_{\text{ext}}$, $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ не зависят от факта присутствия образца, а поля $\mathbf{E}_P$ и $\mathbf{B}_M$, хотя и зависящие в том числе от источников, непосредственно индуцированы поляризацией и намагничённостью образца. Поэтому больший интерес может представлять разность F_{in} полной свободной энергии F в присутствии тела и в его отсутствии, когда она равна F_{ext} (1.12f):

$$F_{\text{in}} = F - F_{\text{ext}}. \quad (1.12k)$$

Вариация потенциала F_{in} может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta F_{\text{in}}(\rho_{\text{ext}}, \mathbf{j}_{\text{ext}}) &= \delta (F(\rho_{\text{ext}}, \mathbf{j}_{\text{ext}}) - F_{\text{ext}}) = \\ &= - \int d^3r (\mathbf{P} \delta \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{M} \delta \mathbf{B}_{\text{ext}}). \end{aligned} \quad (1.12l)$$

Обратим внимание, что интегрирование в последнем выражении (1.12l) производится только по объёму образца.

Фиксированное значение поля вокруг исследуемого тела Рассмотрим теперь ситуацию, когда фиксированы не внешние источники, а значение электромагнитного потенциала на поверхности проводников, на которых находятся внешние заряды ρ_{ext} и по которым текут внешние токи $\mathbf{j}_{\text{ext}}$. Свободная энергия для такого

процесса получается из свободной энергии (1.12i) преобразованием Лежандра:

$$\tilde{F}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = \quad (1.12m)$$

$$\begin{aligned} &= F(\rho_{\text{ext}}, \mathbf{j}_{\text{ext}}) - \int d^3r \left(\varphi \rho_{\text{ext}} - \frac{1}{c} \mathbf{A} \mathbf{j}_{\text{ext}} \right) = \\ &= F(\rho_{\text{ext}}, \mathbf{j}_{\text{ext}}) - \int d^3r \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})}{4\pi}, \end{aligned}$$

где определением φ и $\mathbf{A}$ является выражение для вариации (1.12i). Вариация потенциала $\tilde{F}$ равна

$$\begin{aligned} \delta \tilde{F} &= \int d^3r \left(-\rho_{\text{ext}} \delta \varphi + \frac{1}{c} \mathbf{j}_{\text{ext}} \delta \mathbf{A} \right) = \\ &= \int d^3r \left(-\frac{\mathbf{D} \delta \mathbf{E}}{4\pi} + \frac{\mathbf{H} \delta \mathbf{B}}{4\pi} \right). \end{aligned} \quad (1.12n)$$

Рассмотрение разности, аналогичной разности (1.12k), не имеет смысла, поскольку поля $\mathbf{E}_{\text{ext}}$, $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ изменяются при исчезновении образца.

Из условия минимума свободной энергии F (1.12c, 1.12d) и определения термодинамического потенциала $\tilde{F}$ (1.12n) следует, что истинное распределение

электрического и магнитного полей определяется условиями

$$\frac{\delta \tilde{F}}{\delta \varphi} = -\rho_{\text{ext}}, \quad \frac{\delta \tilde{F}}{\delta \mathbf{A}} = \mathbf{j}_{\text{ext}}. \quad (1.12o)$$

При этом распределения зарядов $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ и токов $\mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ таково, что полный потенциал $(\varphi, \mathbf{A})$ удовлетворяет заданным граничным условиям. Обычно эти условия ставятся на поверхности проводников, вне которых источники отсутствуют, так что уравнения (1.12o) эквивалентны уравнениям

$$\frac{\delta \tilde{F}}{\delta \varphi} = -\frac{\text{div } \mathbf{D}}{4\pi} = 0, \quad \frac{\delta \tilde{F}}{\delta \mathbf{A}} = \frac{\text{rot } \mathbf{H}}{4\pi} = 0, \quad (1.12p)$$

дополненным соответствующими граничными условиями на поверхностях проводников, создающих внешнее с точки зрения образца поле.

Термодинамический потенциал $\tilde{F}$ (1.12m) хорош тем, что он зависит только от локальных значений электрического и магнитного полей. От распределения внешних источников он не зависит, поскольку эти источники учитываются не непосредственно, а через постановку граничных условий на электромагнитное поле.

§1-3. Пондеромоторные силы

Литература: [Тамм, 1966, §32] и [M. Grinfeld и P. Grinfeld, 2015]

Свободная энергия тела $\tilde{F}$ равна интегралу от объёмной плотности $\tilde{\mathcal{F}}$ свободной энергии по объёму:

$$\tilde{F} = \int d^3r \tilde{\mathcal{F}}(T, \rho, u^{ik}, \mathbf{E}), \quad (1.13a)$$

где ρ есть концентрация (а не массовая плотность), T — температура, $u^{ik}(\mathbf{r})$ — тензор деформации среды (ниже в целях упрощения изложения полагаем, что деформация у среды отсутствует). Отметим, что мы используем именно термодинамический потенциал $\tilde{F}$ (1.12m), поскольку он зависит только от локальных значений электрического и магнитного полей, в отличие от потенциала F (1.12b).

Мы полагаем, что среда находится в термодинамическом равновесии, так что температура и химический потенциал μ однородны в пространстве. Кроме того, мы полагаем, что сторонние заряды отсутствуют. В таком случае условиями равновесия являются

$$\frac{\partial \mu}{\partial r^i} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r^i} = 0, \quad \text{div } \mathbf{D} = 0, \quad (1.13b)$$

где $\mathbf{D}$ — вектор индукции магнитного поля, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор. Последнее равенство в (1.13b) было нами установлено для электростатики ранее, см. (1.12c).

Выразим полную пространственную производную плотности свободной энергии через градиенты локальных величин:

$$\frac{d\tilde{\mathcal{F}}}{dr^i} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r^i} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial E^k} \frac{\partial E^k}{\partial r^i}. \quad (1.13c)$$

Замечаем, что в условиях термодинамического равновесия

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial E^k} = -\frac{D^k}{4\pi}, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial \rho} = \mu. \quad (1.13d)$$

Первое равенство в (1.13d) было нами получено ранее, см. (1.12n, 1.12p); второе равенство есть определение химического потенциала. Поскольку мы имеем дело со статикой, то электрическое поле потенциально, см. (1.12a), то¹

$$\partial_i E^k = \partial_k E^i.$$

Используя условия равновесия (1.13b) и потенциальность электрического поля, получаем, что в правой части (1.13c) производную по r^k можно вынести перед всем выражением. Переносим в (1.13c) всё в одну сторону

¹С математической точки зрения равенства (1.13b) можно считать уравнениями движения, а условие потенциальности электрического поля — связью первого рода Дирак [1979, Лекции по квантовой механике. Лекция 1].

уравнения, получаем, что это уравнение переписывается в виде

$$\begin{aligned}\partial_k \sigma^{ik} &= 0, \\ \sigma^{ik} &= (\mathcal{F} - \mu\rho) \delta^{ik} + \frac{E^i D^k}{4\pi},\end{aligned}\quad (1.13e)$$

В (1.13e) σ^{ik} — тензор напряжений, или, что то же самое, пространственные компоненты тензора энергии-импульса. Отметим также, что комбинация

$$\mathcal{F} - \mu\rho = -P_{tot}, \quad (1.13f)$$

где P_{tot} есть полное давление, которое включает в себя в нашем случае два вклада — от вещества и от электрического поля. Так, при отсутствии вещества $P_{tot} = E^2/8\pi$, а полное выражение для тензора напряжений соответствует свободному электрическому полю.

Предел слабых полей в жидкости. Будем предполагать, что средой является жидкость, в которой тензор напряжений σ_0^{ik} в отсутствии электромагнитного поля определяется только давлением. Отметим, что для жидкостей установленный нами тензор напряжений (1.13e) совпадает с уравнением [Ландау и Лифшиц, 1982, Ур. (15.7)], полученным другим, более физически наглядным, но менее компактным образом. Кроме того, рассмотрим предел слабых полей, когда связь между индукцией электрического поля и интенсивностью элек-

трического поля линейна, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$. В этом случае

$$\tilde{\mathcal{F}}(T, \rho, \mathbf{E}) = \mathcal{F}_0(T, \rho) - \frac{\varepsilon E^2}{8\pi},$$

где $\mathcal{F}_0$ — выражение для свободной энергии в отсутствии электрического и магнитного полей. Проводя дальнейшие вычисления получаем тензор напряжений

$$\sigma^{ik} = \sigma_0^{ik} + \sigma_E^{ik}, \quad \sigma_0^{ik} = -P_0 \delta^{ik}, \quad (1.13g)$$

$$\sigma_E^{ik} = \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \varepsilon \right) \frac{E^2}{8\pi} \delta^{ik} + \frac{\varepsilon E^i E^k}{4\pi}.$$

Часть тензора напряжений $\hat{\sigma}_0$ соответствует тензору напряжений при нулевом электрическом поле. Оставшаяся часть $\hat{\sigma}_E$ описывает влияние именно электрического поля, то есть описывает пондеромоторные силы, действующие в образце. Сила, называемая *пондеромоторной силой*, действующая на единицу объёма образца со стороны электрического поля, равна

$$f^i = \partial_k \sigma_E^{ik} = \text{grad} \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \frac{E^2}{8\pi} \right) - \frac{E^2}{8\pi} \text{grad} \varepsilon \quad (1.13h)$$

Выражение (1.13e) верно также и для слабо-неоднородной среды, поскольку в этом случае полученное локальное выражение для тензора напряжений σ^{ik} также применимо.

§1-4. Линейный отклик однородной среды на электромагнитное поле

Рассмотрим однородную среду и будем предполагать, что электромагнитное поле слабое, так что отклик среды на него является линейным. В этом случае электрическая и магнитная индукция линейно зависят от электрического и магнитного полей,

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \hat{\mu} \mathbf{H}. \quad (1.14a)$$

Здесь *диэлектрическая проницаемость* (*dielectric permittivity*) $\hat{\varepsilon}$ и *магнитная восприимчивость* $\hat{\mu}$ в общем случае являются линейными операторами, нелокальными как по времени, так и в пространстве. Кроме того, эти величины являются тензорами второго ранга. Таким образом, например, индукция электрического поля

$$\begin{aligned}D^i(t, \mathbf{r}) &= (\hat{\varepsilon} \mathbf{E})^i(t, \mathbf{r}) = \\ &= \int_{-\infty}^t dt' \int d^3 r' \varepsilon^{ij}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') E^j(t', \mathbf{r}').\end{aligned}\quad (1.14b)$$

При записи интеграла по времени мы учли принцип причинности, выражающий собой то, что диэлектриче-

ская поляризация (1.8)

$$\mathbf{P} = (\mathbf{D} - \mathbf{E})/4\pi = \hat{\chi} \mathbf{E} \quad (1.14c)$$

может определяться только значением электрического поля в более ранние моменты времени. Мы ввели *диэлектрическую восприимчивость*, или *диэлектрическую поляризуемость* (*electric susceptibility*), среды

$$\hat{\chi} = \frac{\hat{\varepsilon} - 1}{4\pi}. \quad (1.14d)$$

В случае металлов для описания отклика среды на электрическое поле вместо диэлектрической проницаемости используют *проводимость* σ , которая определяет электрический ток,

$$\mathbf{j}_p = \hat{\sigma} \mathbf{E}. \quad (1.14e)$$

задающий скорость изменения вектора поляризации, см. (1.7e).

Согласно уравнениям (1.9a, 1.9b) эволюция электромагнитного поля описывается системой уравнений Максвелла

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \partial_t (\varepsilon \mathbf{E}), \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t (\hat{\mu} \mathbf{H}). \quad (1.14f)$$

Мы приняли, что свободные заряды и их ток отсутствуют. В этом случае два скалярных уравнений Максвелла (1.9c, 1.9d)

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \hat{\epsilon} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \hat{\mu} \mathbf{H} = 0$$

являются следствием двух векторных (1.14f).

1-4.1 Частотное представление

Для неограниченной однородной среды удобно перейти к Фурье-представлению. Для этого положим, что электромагнитное поле зависит от времени и координат как

$$\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t). \quad (1.14g)$$

Тогда уравнения Максвелла (1.14f) приобретают вид

$$\epsilon^{ijk} k^j \mathbf{H}^k = -\frac{\omega}{c} \epsilon^{ij} \mathbf{E}^j, \quad \epsilon^{ijk} k^j \mathbf{E}^l = \frac{\omega}{c} \mu^{ij} \mathbf{H}^j, \quad (1.14h)$$

где $\epsilon^{ij} = \epsilon^{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\mu^{ij} = \mu^{ij}(\omega, \mathbf{k})$ суть Фурье-образы диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости. Например,

$$\epsilon^{kj}(\omega, \mathbf{k}) = \int dt d^3r e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} \epsilon^{kj}(t, \mathbf{r}). \quad (1.14i)$$

В частотном представлении удобно связать проводимость (1.14e) с диэлектрической проницаемостью (1.14a), используя связь (1.7e) тока $\mathbf{j}_p$ с вектором поляризованности $\mathbf{P}$:

$$\epsilon^{kj}(\omega) = 1 + \frac{4\pi i \sigma^{kj}(\omega)}{\omega}. \quad (1.14j)$$

1-4.1.1 Обобщённая диэлектрическая проницаемость

Разделение полного электрического тока на магнитную и поляризационную части

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \partial_t \mathbf{P}, & 4\pi \mathbf{M} &= (1 - \hat{\mu}^{-1}) \mathbf{B}, \\ & & 4\pi \mathbf{P} &= (\hat{\epsilon} - 1) \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (1.14k)$$

в общем случае является неоднозначной процедурой. Может так оказаться, что и физических соображений недостаточно для того, чтобы добиться однозначности. Если это так — однозначность установить не удастся — то имеет смысл отказаться от введения магнитной восприимчивости $\hat{\mu}$, определив весь ток как отклик на электрическое поле. Такой вариант записи не накладывает ограничений на вид линейного отклика среды, поскольку магнитное поле связано с электрическим полем самими уравнениями Максвелла.

Обозначим сейчас оператор диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}_{\text{full}}$ в случае, когда по определению $\hat{\mu} = 1$, и выразим его через $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}$. Тем самым мы покажем, что с помощью одного $\hat{\epsilon}_{\text{full}}$ можно описать все виды линейного отклика среды. Электрический ток

$$4\pi \mathbf{j} = c \operatorname{rot} ((1 - \hat{\mu}^{-1}) \mathbf{B}) + \partial_t (\hat{\epsilon} - 1) \mathbf{E}$$

согласно (1.14k), а магнитная индукция

$$\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}].$$

Снова переписывая ток, получаем

$$\begin{aligned} 4\pi \mathbf{j} &\equiv -i\omega (\hat{\epsilon}_{\text{full}} - 1) \mathbf{E} = \\ &= \frac{ic^2}{\omega} \left[\mathbf{k} \times ((1 - \hat{\mu}^{-1}) [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]) \right] - i\omega (\hat{\epsilon} - 1) \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (1.14l)$$

то есть

$$\epsilon_{\text{full}}^{ij} = \epsilon^{ij} + \frac{c^2}{\omega^2} \epsilon^{ikm} \epsilon^{jln} k^k k^l (\delta^{mn} - (\hat{\mu}^{-1})^{mn}). \quad (1.14m)$$

1-4.2 Симметрии диэлектрической проницаемости

Поскольку во временно-координатном представлении диэлектрическая проницаемость связывает два вещественных векторных поля, она сама должна быть вещественной. В частотно-волновом представлении этот факт записывается в виде

$$\epsilon^{ik}(-\omega, -\mathbf{k}) = \epsilon^{*ik}(\omega, \mathbf{k}). \quad (1.15a)$$

Расширив теперь это равенство на всю комплексную плоскость частоты, получим, что действительная и мнимая части $\epsilon^{ik}(\omega)$ являются, соответственно, чётной и нечётной функциями относительно действительной части частоты:

$$\epsilon^{ik}(-\omega^*, -\mathbf{k}) = (\epsilon^{ik}(\omega, \mathbf{k}))^*, \quad (1.15b)$$

где звёздочка означает комплексное сопряжение.

В дальнейшем удобно разложить тензора $\epsilon^{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\mu^{ij}(\omega, \mathbf{k})$ на эрмитову и антиэрмитову части. Например,

$$\epsilon^{ik} = \epsilon_h^{ik} + i\epsilon_a^{ik}, \quad \epsilon_h^{*ki} = \epsilon_h^{ik}, \quad \epsilon_a^{*ki} = \epsilon_a^{ik}. \quad (1.15c)$$

Ниже будет показано, см. § 3-7, что анти-эрмитова часть определяет скорость диссипации энергии электромагнитного поля в тепло. Эрмитова часть (при относительно малой анти-эрмитовой) определяет дисперсию электромагнитных волн и запасённую в веществе энергию электромагнитных колебаний.

Обращение времени. Обобщённая восприимчивость обладает симметрией, вытекающей из симметрии связываемых ею величин по отношению к операции обращения времени, см. Пункт 7-1.3. Электрическое поле $\mathbf{E}$ сохраняет знак при изменении знака времени, тогда как магнитное поле $\mathbf{B}$ изменяет знак. Поэтому, будучи применённым к диэлектрической проницаемости, эта симметрия даёт:

$$\begin{aligned} \epsilon^{ik}(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{B}_0) &= \epsilon^{ki}(\tau, -\mathbf{r}, -\mathbf{B}_0), & \text{или} \\ \epsilon^{ik}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{B}_0) &= \epsilon^{ki}(\omega, -\mathbf{k}, -\mathbf{B}_0). \end{aligned} \quad (1.15d)$$

Отметим, что изменение знака радиус-вектора $\mathbf{r}$ стоит в том же ряду, что и перестановка векторных индексов 'i' и 'k'. Магнитное поле $\mathbf{B}_0$ есть среднее по времени значение магнитного поля, которое предполагается также и однородным в пространстве.

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

§2-1. Простейшие электростатические задачи

Общими уравнениями электростатики являются уравнение Максвелла (1.9с) на индукцию электрического поля

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (2.1a)$$

и условие потенциальности электрического поля,

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (2.1b)$$

Приращение свободной энергии тела F (1.12i) при фиксированном распределении внешних зарядов равно

$$\delta F = \int d^3r \frac{\mathbf{E} \delta \mathbf{D}}{4\pi} = \int d^3r \varphi \delta \rho_{\text{ext}}. \quad (2.1c)$$

Линейный отклик среды. Если отклик среды линеен, так что

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.1d)$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ есть известное распределение диэлектрической проницаемости в пространстве, то уравнение (1.12с), определяющее распределение электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, принимает вид

$$\operatorname{div} (\varepsilon(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi) = 0. \quad (2.1e)$$

Отметим, что, если в уравнении (2.1e) диэлектрическую проницаемость поделить на константу, то решение для потенциала останется неизменен. В частности, может быть удобным производить деление на диэлектрическую проницаемость среды, в которую помещено тело.

Часть свободной энергии $F - F_0$ (F_0 — свободная энергия в отсутствии электрического поля), связанная с взаимодействием системы с электрическим полем, может быть найдена путём интегрирования вариации (2.1с) по полю электрической индукции в пределах от нулевого поля $\mathbf{D} = 0$ до его текущего значения (2.1d) с учётом (2.1d),

$$F = F_0 + \int d^3r \frac{\varepsilon \mathbf{E}^2}{8\pi}. \quad (2.1f)$$

Напротив, свободная энергия $\tilde{F}$ (1.12m) есть

$$\tilde{F} = F_0 - \int d^3r \frac{\varepsilon \mathbf{E}^2}{8\pi}. \quad (2.1g)$$

Уравнение Максвелла (2.1e) получается путём приравнивания вариации $\tilde{F}$ (2.1g) по потенциалу φ нулю, см.

общее уравнение (1.12p). Приравнивать же нулю вариацию по потенциалу свободной энергии F (2.1f) было бы неверно, поскольку в выражении (2.1f) не выделена явно зависимость от внешних зарядов.

2-1.1 Шар в электрическом поле

Рассмотрим шар, изготовленный из однородного материала, находящийся в некоторой однородной среде. Далеко от шара электрическое поле становится однородным в пространстве и равным $\mathbf{E}_{\text{ext}}$. Диэлектрическая проницаемость материала шара равна ε_2 , диэлектрическая проницаемость среды равна ε_1 . Радиус шара равен a .

Наша задача состоит в нахождении распределения поля вблизи шара и внутри него. Поскольку в общем уравнении на распределение электрического поля (2.1e) диэлектрическая проницаемость может быть поделена на константу без изменения распределения поля, то примем, что снаружи шара диэлектрическая проницаемость равна 1, а внутри, соответственно, $\varepsilon = \varepsilon_2/\varepsilon_1$. Как оказывается, поле внутри шара является однородным, направленным (или противонаправленным) внешнему электрическому полю $\mathbf{E}_{\text{ext}}$. Снаружи шара поле есть суперпозиция внешнего поля $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ и поля диполя, образованного поляризованностью зарядов в шаре и в среде.

Задача обладает аксиальной симметрией. Выберем декартову систему координат $Oxyz$, начало которой находится в центре шара, ось Oz сонаправлена полю $\mathbf{E}_{\text{ext}}$. Кроме того, введём сферические координаты $\{r, \theta, \phi\}$. Поле внутри шара равно

$$\mathbf{E} = E_{\text{in}} \mathbf{e}_z, \quad (2.2)$$

а поле снаружи шара есть

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{d} = - \int d^3r \, \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{3} a^3 \mathbf{E}_{\text{in}}.$$

Обратим внимание, что дипольный момент шара не равен дипольному моменту среды, заполняющей шар, поскольку электрическое поле снаружи определяется в том числе и поляризацией окружающей шар среды. Граничные условия (1.9b, 1.9с) на поверхности шара дают

условия на непрерывность касательной компоненты поля E_θ (т.е. непрерывность потенциала φ),

$$E_{\text{in}} \sin \theta = (E_{\text{ext}}^z - d^z/a^3) \sin \theta, \quad (2.4)$$

и на непрерывность нормальной компоненты D_n электрической индукции,

$$\varepsilon E_{\text{in}} \cos \theta = E_{\text{ext}}^z \cos \theta + \frac{3d^z \cos \theta}{a^3}. \quad (2.5)$$

Уравнения (2.3, 2.4, 2.5) совместны, что означает соответствие действительности вида распределения поля, который был заявлен в начале решения задачи.

Дипольный момент и поле внутри шара равны

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E}_{\text{ext}}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3. \quad (2.6)$$

Величина α , связывающая полный дипольный момент тела со внешним электрическим полем, называется его поляризуемостью. В общем случае поляризуемость, связывая два вектора, является тензором второго ранга. Для шара она является скаляром в силу его симметрии.

Дипольный момент шара сонаправлен наложенному электрическому полю $\mathbf{E}_{\text{ext}}$, если диэлектрическая проницаемость материала шара больше, чем диэлектрическая проницаемость среды, $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Такой случай реализуется, например, для капли воды или любого другого шара из диэлектрика, находящиеся в воздухе (пустоте). Металлический шар, у которого формально диэлектрическая проницаемость на низких частотах чисто мнимая и большая по амплитуде, см. (3.13e), также подходит под этот случай; его поляризуемость равна $\alpha = a^3$.

Наоборот, дипольный момент направлен противоположно наложенному электрическому полю $\mathbf{E}_{\text{ext}}$, если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Например, так происходит для пузырька в воде или для любого вкрапления материала с диэлектрической проницаемостью меньше, чем у среды.

2-1.2 Заряд над границей раздела

2-1.3 Заряд рядом с металлическим шаром

2-1.4 Задачи

• **Задача 1:** Определите погонную плотность дипольной поляризуемости для стержня кругового сечения. Электрическое поле направлено поперёк оси стержня. Диэлектрическая проницаемость материала стержня равна ε .

• **Задача 2:** Найти погонную ёмкость (ёмкость на единицу длины) для цилиндрического конденсатора. Внутренняя обкладка имеет внешний радиус a , внешняя обкладка имеет внутренний радиус b . Пространство между обкладками заполнено средой с диэлектрической проницаемостью ε .

Решение: Пусть V — разность потенциалов между внешней и внутренней обкладками, а ρ — погонная плотность заряда на внешней обкладке (тогда на внутренней погонная плотность заряда равна $-\rho$). Нашей целью является найти ёмкость C в уравнении $\rho = CV$.

Потенциал электрического поля φ в среде удовлетворяет уравнению Лапласа, $\Delta\varphi = 0$, смотри (2.1e). Кроме того, он аксиально симметричен. Поэтому

$$\varphi = \frac{V}{\ln(b/a)} \ln \frac{r}{\sqrt{ab}}. \quad (2.7a)$$

С другой стороны, радиальная компонента электрической индукция на поверхности внешней обкладки равна

$$D^r = -\varepsilon \partial_r \varphi \Big|_{r=b} = -\frac{\varepsilon V}{b \ln(b/a)} = -\frac{4\pi\rho}{2\pi b}. \quad (2.7b)$$

Откуда ёмкость

$$C = \frac{\varepsilon}{2 \ln(b/a)}. \quad (2.7c)$$

• **Задача 3:** Найти погонную ёмкость (ёмкость на единицу длины) C для конденсатора, образованного двумя параллельными металлическими стержнями круглого сечения. Радиус обоих стержней равен a , расстояние между их осями равно b . Пространство между проводами заполнено средой с диэлектрической проницаемостью ε . Отдельно рассмотреть пределы далеко разнесённых стержней $b \gg a$ и почти касающихся стержней, когда расстояние между их поверхностями $d = b - 2a \ll a$.

Решение: Определим декартову систему координат $Oxyz$, у которой ось Oz направлена вдоль оси стержней, плоскость $x = 0$ проходит по середине между стержнями, а оси стержней лежат в плоскости $y = 0$. Для решения уравнения Лапласа в области между стержнями удобно воспользоваться бицилиндрической системой координат $\{\tau, \sigma, z\}$, которые связаны с декартовыми координатами конформным преобразованием

$$x + iy = l \operatorname{cth} \frac{\tau - i\sigma}{2},$$

$$x = h \operatorname{sh} \tau, \quad y = h \sin \sigma, \quad h = \frac{l}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma}, \quad (2.7d)$$

где h есть фактор Ламе, а l задаёт масштаб длины. Изоповерхности $\tau = \text{const}$ представляют собой цилиндры, в декартовых координатах задаваемых уравнением

$$(x - l \operatorname{cth} \tau)^2 + y^2 = \frac{l^2}{\operatorname{sh}^2 \tau}. \quad (2.7e)$$

Поверхности двух одинаковых стержней из условия задачи являются изоповерхностями $\tau = \pm \tau_0$,

$$\begin{aligned} 2l \operatorname{cth} \tau_0 &= b, \\ \Rightarrow l^2 &= \frac{b^2}{4} - a^2, \quad \operatorname{ch} \tau_0 = \frac{b}{2a}. \end{aligned} \quad (2.7f)$$

В силу того, что преобразование $\{x, y\} \rightarrow \{\tau, \sigma\}$ канонично, оператор Лапласа в бицилиндрических координатах имеет вид

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h^2}(\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2)\varphi + \partial_z^2\varphi. \quad (2.7g)$$

§2-2. Эллипсоид во внешнем электрическом поле

Если диэлектрическая проницаемость тела велика, то при помещении его во внешнее статическое электрическое поле его форма существенно влияет на распределение поля вблизи его границ. Можно добиться того, что амплитуда поля в определённых областях оказывается существенно больше амплитуды приложенного поля.

В этом параграфе мы разберём этот эффект на примере тел эллипсоидальной формы. Причина такого выбора состоит в том, что задача об отклике эллипсоида на внешнее поле может быть решена до конца аналитически. Кроме того, эллипсоидальная форма позволяет получить высокую степень усиления поля, по-видимому, близкую к максимально возможной.

Для того, чтобы понять основные закономерности распределения поля снаружи и внутри эллипсоида, нам достаточно будет рассмотреть эллипсоиды вращения, у которых две из трёх полуосей совпадают, будучи равными a . Третью ось обозначим b . Если эллипсоид сильно вытянутый, так что $b \gg a$, внешнее поле однородно и направлено вдоль главной оси эллипсоида, а материалом эллипсоида является металл, то поле усиливается вблизи кончика эллипсоида в $1/L_b = (b/a)^2 / \ln(2b/a)$ раз (коэффициент L_b называется фактором деполяризации). При этом линейный размер области, где достигается настолько большое усиление, совсем не велик и составляет примерно a^2/b . Если же диэлектрическая проницаемость ε материала эллипсоида хотя и велика, $\varepsilon \gg 1$, но тем не менее $L_b\varepsilon \ll 1$, то усиление поля в области вблизи кончика эллипсоида происходит в ε раз.

2-2.1 Точное решение задачи

Задача об эллипсоиде, состоящем из однородного материала, помещённом в однородное электрическое поле, может быть решена полностью аналитически, см., например, [Ландау и Лифшиц, 1982, §8]. Результаты этого рассмотрения следующие.

Поле внутри эллипсоида также является однородным. Направим оси координат по главным осям эллипсоида. Значения полуосей равны

$$a \leq b \leq c, \quad (2.8a)$$

и соответствуют направлениям x , y и z . Пусть диэлектрическая проницаемость материала эллипсоида равна

Более подробное описание бицилиндрических координат можно найти в [Lekner, 2021].

ε , у окружения проницаемость равна единице. Электрическое поле $\mathbf{E}_{\text{in}}$ внутри связано со внешним полем $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ соотношениями

$$\mathbf{E}_{\text{in}}^{(i)} = \frac{\mathbf{E}_{\text{ext}}^{(i)}}{1 + (\varepsilon - 1)L_i}. \quad (2.8b)$$

Дипольный момент эллипсоида, соответственно, имеет компоненты

$$d^{(i)} = \frac{abc}{3} \frac{\varepsilon - 1}{1 + (\varepsilon - 1)L_i} \mathbf{E}_{\text{ext}}^{(i)}. \quad (2.8c)$$

Здесь факторы деполяризации $L_{a,b,c}$ определяются интегралами типа

$$L_a = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s + a^2)R_s}, \quad (2.8d)$$

$$R_s = \sqrt{(s + a^2)(s + b^2)(s + c^2)}.$$

Сумма факторов деполяризации равна единице (этот факт можно установить из суммы (2.8d), перейдя в полученном интеграле к R_s в качестве переменной интегрирования), и они удовлетворяют неравенствам

$$L_a + L_b + L_c = 1, \quad L_a \geq L_b \geq L_c. \quad (2.8e)$$

2-2.1.1 Эллипсоид вращения

Рассмотрим эллипсоид вращения, главная ось которого равна b , а две другие равны a . Выберем декартову систему координат, в которой главная ось эллипса направлена по оси z (т.е. условие (2.8a) в общем случае не выполняется). Обозначим факторы деполяризации эллипсоида $L_{a,b}$: поскольку они удовлетворяют равенству $2L_a + L_b = 1$ (2.8e), то достаточно знать только один из них.

Поле внутри цилиндра однородно и покомпонентно равно [Ландау и Лифшиц, 1982, §8, Ур.(8.9)].

$$E_{\text{in}}^z = \frac{1/L_b}{\varepsilon - \varepsilon_{\text{res},b}} E_{\text{ext}}^z, \quad E_{\text{in}}^\perp = \frac{1/L_a}{\varepsilon - \varepsilon_{\text{res},a}} E_{\text{ext}}^\perp, \quad (2.8f)$$

Положение резонансов

$$\varepsilon_{\text{res},a} = -\frac{1}{L_a} + 1, \quad \varepsilon_{\text{res},b} = -\frac{1}{L_b} + 1. \quad (2.8g)$$

Для вытянутого эллипсоида, когда $b > a$, фактор деполяризации для главной оси есть (см. [Ландау и Лифшиц, 1982, §4, ур. (4.32)])

$$L_b = \left(\frac{1}{e^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} - 1 \right). \quad (2.8h)$$

где эксцентриситет сечения эллипсоида плоскостью Oxz равен $e = \sqrt{1 - a^2/b^2}$. В пределе сильно вытянутого эллипсоида, когда $b \gg a$, получаем приближённо, что

$$L_b = \frac{a^2}{b^2} \ln \frac{2b}{ea} \ll 1, \quad L_a \approx \frac{1}{2}, \quad (2.8i)$$

где e — основание натурального логарифма.

Для сплюснутого эллипсоида, когда $b < a$, в (2.8h) при неизменном определении параметра e он становится чисто мнимым. Поэтому вместо эксцентриситета сечения эллипсоида плоскостью Oxz надо взять параметр $e = \sqrt{a^2/b^2 - 1}$, в этом случае фактор деполяризации для главной оси есть [Ландау и Лифшиц, 1982, §4, ур. (4.32)]

$$L_b = \left(\frac{1}{e^2} + 1 \right) \left(1 - \frac{\arctan e}{e} \right). \quad (2.8j)$$

В пределе сильно сплюснутого эллипсоида, когда $b \ll a$, получаем приближённо, что

$$L_b = 1 - \frac{\pi b}{2a}, \quad L_a = \frac{\pi b}{4a}. \quad (2.8k)$$

2-2.2 Приближённое описание для удлинённого тела вращения

Рассмотрим тело, представляющее из себя фигуру вращения, помещённое во внешнее электрическое поле, направленное вдоль оси вращения тела. Выберем систему координат, в которой ось Oz направлена вдоль оси вращения тела. Плоскость Oxy даёт круговое сечение тела с радиусом $\rho = \rho(z)$. Для эллипсоида вращения $\rho = a\sqrt{1 - z^2/b^2}$. Тело выполнено из некоторого материала, имеющего диэлектрическую проницаемость ε . Если речь идёт о квази-стационарном поле, то может быть более удобно характеризовать электрический отклик материала тела проводимостью σ (3.13e).

В этом пункте мы полагаем тело вращения сильно удлинённым, так что его длина $b \gg \rho$. Кроме того, мы полагаем, что поперечное сечение тела меняется не очень быстро, так что $d\rho/dz \ll 1$, т.е. на расстоянии $z \sim \rho$ поперечное сечение изменяется слабо. Это позволяет нам считать, что электрическое поле внутри тела однородно в поперечном направлении.

Полное электрическое поле описывается внешним полем $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ и наведённым потенциалом Φ , так что

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ext}} - \text{grad } \Phi. \quad (2.9a)$$

Выразим сначала распределение заряда через электрическое поле. Поскольку в нашем приближении электрическое поле в поперечном направлении однородно, то z -компонента поляризации материала тела P удовлетворяет уравнению

$$\frac{4\pi P}{\varepsilon - 1} = E_{\text{ext}} - \partial_z \Phi, \quad (2.9b)$$

где сечение тела вращения плоскостью, перпендикулярной длинной оси, равно $S_z = \pi \rho^2(z)$. Погонная плотность зарядов $q(z)$ и поляризация связаны между собой уравнением непрерывности:

$$\partial_z(S_z P) = -q. \quad (2.9c)$$

Теперь, наоборот, найдём связь потенциала Φ с погонной плотностью заряда $q(z)$. В пределе $b \gg \rho$ эта связь записывается в виде

$$\Phi(z) \approx \int_{-b}^b \frac{q(z') dz'}{|z - z'|}, \quad (2.9d)$$

где интеграл берётся по области $|z' - z| \gtrsim \rho(z)$. Преобразуем это выражение

$$\begin{aligned} \Phi(z) &\approx q(z) \int_{-b}^b \frac{dz'}{|z - z'|} + \int_{-b}^b \frac{(q(z') - q(z)) dz'}{|z - z'|} \approx \\ &\approx \frac{q(z)}{C_z}, \quad \frac{1}{C_z} = \ln \frac{b^2 - z^2}{\rho^2} = \ln \frac{b^2 - z^2}{S_z/\pi}. \end{aligned} \quad (2.9e)$$

Последний переход в цепочке равенств для $\Phi(z)$ верен, когда $q(z')$ не возрастает слишком быстро при удалении z' от z . Таким образом, с логарифмической точностью, то есть в пределе $\ln(b/\rho) \gg 1$, получаем локальную связь между зарядом и потенциалом. Продифференцируем теперь обе части (2.9e) по z и выразим производную потенциала $\partial_z \Phi$ и плотность зарядов q через поляризацию P согласно (2.9b, 2.9c). В результате получаем уравнение, записанное в терминах поляризации P :

$$\frac{4\pi}{\varepsilon - 1} P - \partial_z \frac{1}{C_z} \partial_z(S_z P) = E_{\text{ext}}(z). \quad (2.9f)$$

Если помножить это уравнение на S_z и продифференцировать его по z , мы получим уравнение на заряд q :

$$\frac{4\pi}{\varepsilon - 1} q - \partial_z S_z \partial_z \frac{q}{C_z} = -\partial_z(S_z E_{\text{ext}}). \quad (2.9g)$$

Рассмотрим теперь частный случай эллипсоида вращения. Связь (2.9e) между погонной плотностью заряда и наведённым потенциалом упрощается, поскольку ёмкость C перестаёт зависеть от z :

$$\Phi(z) = \frac{q(z)}{C}, \quad C = \frac{1}{2 \ln(b/a)}. \quad (2.9h)$$

Если внешнее поле E_{ext} однородно, то P также однородно вдоль оси Oz : действительно, из (2.9f) получаем, что

однородное решение для поляризации допускается этим уравнением, её величина определяется равенством

$$\left(\frac{1}{\varepsilon - 1} + L_b\right) 4\pi P = E_{\text{ext}}, \quad L_b \approx \frac{a^2}{b^2} \ln \frac{b}{a}, \quad (2.9i)$$

где фактор деполяризации L_b в пределе сильно вытянутого эллипсоида с логарифмической точностью совпадает с его асимптотикой (2.8k) для точного решения. Распределение погонного заряда

$$q(z) = \frac{(\varepsilon - 1)a^2}{2(1 + (\varepsilon - 1)L_b)b^2} z E_{\text{ext}}. \quad (2.9j)$$

Решение (2.9i) совпадает с логарифмической точностью с точным ответом (2.8f).

2-2.3 Задачи

2-2.3.1 Распределение поля вокруг эллипсоида

• **Задача 1:** Найти с логарифмической точностью распределение поля вокруг удлинённого эллипсоида вращения (полуоси $b \gg a, a$), сделанного из материала с диэлектрической проницаемостью ε и помещённого во внешнее постоянное электрическое поле, направленное вдоль его оси вращения. Найти зависимость поля i) на расстояниях $a < r_\perp \ll b$ от оси вращения и $r < b$ от центра эллипсоида; ii) на расстояниях $r \gg b$ от центра эллипсоида. *Указание:* на близких расстояниях удобно

сначала найти электростатический потенциал. *Литература:* § 2-2

• **Задача 2:** Найти с логарифмической точностью распределение поля вокруг удлинённого металлического эллипсоида вращения (полуоси $b \gg a, a$), помещённого во внешнее постоянное электрическое поле, направленное вдоль его оси вращения. Найти зависимость поля i) на расстояниях $a < r_\perp \ll b$ от оси вращения и $r < b$ от центра эллипсоида; ii) на расстояниях $r \gg b$ от центра эллипсоида. *Указание:* на близких расстояниях удобно сначала найти электростатический потенциал, используя обобщённую соответствующим образом (2.9e) и (2.9j). *Литература:* § 2-2

• **Задача 3:** Найти поле вблизи кончика вытянутого эллипсоида вращения, когда внешнее поле $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ направлено вдоль его главной оси: i) найдите поле на самом кончике эллипсоида вне него; ii) оцените область вблизи кончика, в которой поле остаётся однородным. Полуоси эллипсоида равны a , диэлектрическая проницаемость материала эллипсоида равна ε . Рассмотрите отдельно пределы $1 \ll \varepsilon \ll 1/L_b$ и $1/L_b \ll \varepsilon$.

• **Задача 4:** Найти распределение поля вокруг сплюснутого эллипсоида вращения (полуоси $b \ll a, a$), сделанного из диэлектрика с проницаемостью ε и помещённого во внешнее постоянное электрическое поле, направленное вдоль его оси вращения. Найти зависимость поля вдоль оси вращения на расстояниях $z \ll a$ и $z \gg a$ от экваториальной плоскости. *Литература:* § 2-2.

§2-3. Двумерная электростатика

Общие свойства конформных преобразований.

Сделаем здесь несколько общих замечаний, касающихся комплексного анализа.

- i) Каждому комплексному числу, скажем P , соответствует вектор с координатами $\{\text{Re } P, \text{Im } P\}$. Если два вектора, скажем, вектора $v = \partial_\phi P$ и $u = Q$ (2.17c) ортогональны друг другу и составляют правую двойку $\{v, u\}$, то их произведение $v^* u$ является чисто мнимым с положительной мнимой частью.
- ii) Домножение некоторого вектора v на фазовый множитель, $e^{i\theta} v$, есть его поворот на угол θ (против часовой стрелки).
- iii) Далее, конформное преобразование сохраняет углы между векторами. Действительно, преобразование векторов при переходе от z к ζ производится с помощью матрицы

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \partial \xi / \partial x & \partial \xi / \partial y \\ \partial \eta / \partial x & \partial \eta / \partial y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \hat{D} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, конформное преобразование (2.17a) даёт связь

$$dz = I e^{i\theta} d\zeta, \quad I = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|, \quad e^{i\theta} = \frac{dz/d\zeta}{I}, \quad (2.12)$$

что означает, что матрица

$$\hat{D} = \frac{1}{I} \hat{O}(-\theta) = \frac{1}{I} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

где $\hat{O}(\theta)$ — ортогональная матрица поворота на угол θ .

- iv) Частные производные по координатам

$$\partial_x = \partial_z + \partial_{z^*}, \quad \partial_y = i\partial_z - i\partial_{z^*}. \quad (2.13)$$

- v) Оператор Лапласа

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial_z \partial_{z^*}$$

после конформного преобразования становится равным

$$\Delta = \frac{4}{I^2} \partial_\zeta \partial_{\zeta^*},$$

то есть уравнение Лапласа после конформного преобразования не изменяет своего вида.

2-3.1 Эллиптический цилиндр

• **Задача 1:** Найти факторы деполяризации для длинного цилиндра, изготовленного из однородного изотропного материала, являющегося в поперечном сечении эллипсом с полуосями $b \geq a$. *Указание:* Поскольку задача эффективно двумерная, то решение можно построить используя то, что уравнение Лапласа инвариантно относительно конформных преобразований. Совершите такое конформное преобразование комплексной плоскости $z = x + iy$, которое переведёт эллипс (границу сечения цилиндра) в круг. *Литература:* Пункт 2-3.1.

Рассмотрим эллиптический цилиндр, у которого $c = \infty$, см. (2.8a), и, для определённости, $b \geq a$ (b соответствует направлению по Oy). Тогда ответ состоит в том, что

$$L_a = \frac{b}{a+b}, \quad L_b = \frac{a}{a+b}. \quad (2.14)$$

Резонансные значения диэлектрической проницаемости равны

$$\varepsilon_{res,a} = -\frac{a}{b}, \quad \varepsilon_{res,b} = -\frac{b}{a} \quad (2.15)$$

Электрическое поле на острие вытянутого эллипса (вне его) равно (если поле направлено по оси y)

$$E_{out,b} = \frac{(1+b/a)\varepsilon}{\varepsilon+b/a} E_{ext}. \quad (2.16)$$

2-3.1.1 Решение задачи

Конформное отображение пространства вне эллипса произведём на внешность круга единичного радиуса (область $|\zeta| > 1$)

$$z = \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{b}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right), \quad \begin{aligned} z &= x + iy, \\ \zeta &= \xi + i\eta. \end{aligned} \quad (2.17a)$$

Введём также обозначение для области $|\zeta| > 1$

$$\zeta = (1+\rho)e^{i\phi}, \quad \rho > 0. \quad (2.17b)$$

Вблизи границы раздела, при $\rho \ll 1$, разложение (2.17a, 2.17b) даёт

$$\begin{aligned} x + iy &= P + Q\rho + \mathcal{O}(\rho^2), \\ P &= a \cos \phi + ib \sin \phi, \\ Q &= b \cos \phi + ia \sin \phi. \end{aligned} \quad (2.17c)$$

Конформное преобразование вблизи границы раздела и далеко от тела. Определим геометрические характеристики выбранного конформного преобразования на поверхности эллипса. Поверхность эллипса задаётся уравнением

$$f = 1, \quad f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Нормаль к поверхности есть

$$n = \frac{\partial_x f + i \partial_y f}{\sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2}} = \frac{Q}{|Q|}. \quad (2.17d)$$

На поверхности эллипса производная конформного преобразования, фигурирующая в (2.12), равна

$$\frac{dz}{d\zeta} = I e^{i\theta} = e^{-i\phi} Q, \quad (2.17e)$$

как следует из (2.17b, 2.17c). Наконец, на больших расстояниях, при $|z| \rightarrow \infty$, конформное преобразование стремится к тождественному, $\zeta \approx z$.

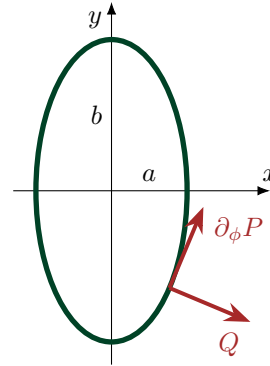


Рис. 2.1

Вне цилиндра электрический потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, поэтому может быть только суммой аналитической и анти-аналитической функцией,

$$\varphi = \varphi_+(z) + \varphi_-(z^*).$$

Для внешнего потенциала φ_{ext} выберем первый вариант, $\varphi_{ext} = \varphi_{ext}(z)$. То, что внешнее поле однородно в пространстве означает, что можно принять

$$\varphi_{ext} = -z. \quad (2.17f)$$

(если поле единичной напряжённости направлено по оси X , то в окончательном ответе надо будет взять действительную часть, если по Y — то, соответственно, мнимую). Поскольку на больших расстояниях конформное преобразование стремится к тождественному, то граничным условием на бесконечности в координатах ζ является

$$\varphi|_{|\zeta| \rightarrow \infty} \rightarrow -\zeta. \quad (2.17g)$$

Постановка граничных условий. Производная по нормали от потенциала на границе раздела

$$\begin{aligned}\partial_n \varphi &= (n^x \partial_x + n^y \partial_y) \varphi = \frac{Q \partial_z \varphi + Q^* \partial_{z^*} \varphi}{|Q|} = \\ &= \frac{e^{i\phi} \partial_\zeta \varphi + e^{-i\phi} \partial_{\zeta^*} \varphi}{|Q|} \Big|_{|\zeta|=1}, \quad (2.17h) \\ \partial_n \varphi_{\text{ext}} &= \frac{Q \partial_z \varphi_{\text{ext}}}{|Q|} = \frac{-b \cos \phi - ia \sin \phi}{|Q|}.\end{aligned}$$

Переходы от производных $\partial_{x,y}$ к производным ∂_{z,z^*} был произведён согласно (2.13), и далее к ∂_{ζ,ζ^*} согласно (2.17e). Числитель в выражении для $\partial_n \varphi_{\text{ext}}$ в (2.17h) такой, какой был бы в случае круглого сечения цилиндра: он содержит только ± 1 гармонику по углу ϕ , что соответствует однородному внешнему полю в координатах $\zeta = \xi + i\eta$. Отметим, что сам вид числителя в (2.17h) соответствует дифференцированию по нормали к линии круга в ζ -координатах: это следствие того, что углы между векторами (в данном случае касательным вектором и вектором нормали) при конформном преобразовании сохраняются. Множитель Q в знаменателе имеет своим происхождением (2.17d), то есть также должен возникнуть и в производной потенциала на внутренней стороне поверхности раздела. Таким образом, мы можем заключить, что внутри цилиндра электрическое поле однородно также, как и в задаче о цилиндре круглого сечения в однородном поле. Поэтому для внутренности совершим следующее (не конформное) линейное преобразование координат

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b. \quad (2.17i)$$

и предполагаем линейную зависимость потенциала

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{in}} &= \alpha_\xi \xi + i\alpha_\eta \eta, \quad (2.17j) \\ \varphi_{\text{in}}|_{|\zeta|=1} &= \alpha_\xi \cos \phi + i\alpha_\eta \sin \phi.\end{aligned}$$

Производная по нормали от потенциала на внутренней стороне границы (поскольку внутри преобразование не является конформным, то мы не можем воспользоваться формулой (2.17h), записанной в терминах производных ∂_{ζ,ζ^*})

$$\begin{aligned}\partial_n \varphi_{\text{in}} &= \left(\frac{n^x}{a} \partial_\xi + \frac{n^y}{b} \partial_\eta \right) \varphi_{\text{in}} = \quad (2.17k) \\ &= \frac{\alpha_\xi b^2 \cos \phi + i\alpha_\eta a^2 \sin \phi}{ab|Q|}.\end{aligned}$$

Потенциал снаружи ищем в виде

$$\varphi = \varphi_{\text{ext}} + \frac{\beta_+}{\zeta} + \frac{\beta_-}{\zeta^*} \quad (2.17l)$$

(напомним, что потенциал диполя в двумерии обратно пропорционален расстоянию), так что на поверхности, при $|\zeta| = 1$

$$\begin{aligned}\varphi &= (\beta_- + \beta_+ - a) \cos \phi + (\beta_- - \beta_+ - b) i \sin \phi, \\ \partial_n \varphi &= -\frac{(\beta_- + \beta_+ + b) \cos \phi + (\beta_- - \beta_+ + a) i \sin \phi}{|Q|}.\end{aligned} \quad (2.17m)$$

(Мы использовали выражения для производной по нормали (2.17h), записанное через производные ∂_{ζ,ζ^*} .)

Глава 3

ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

§3-1. Плоская электромагнитная волна в изотропной среде

Рассмотрим изотропную среду с линейным откликом на электромагнитное поле. Среда изотропная, так что тензора диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости диагональны,

$$\varepsilon^{ik}(\mathbf{k}, \omega) = \delta^{ik} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega), \quad \mu^{ik}(\mathbf{k}, \omega) = \delta^{ik} \mu(\mathbf{k}, \omega). \quad (3.1a)$$

В этом случае уравнения Максвелла (1.14f) упрощаются до

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \partial_t \varepsilon \mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mu \mathbf{H}, \quad (3.1b)$$

Скалярными уравнения Максвелла являются

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (3.1c)$$

Перепишем материальную связь между полями и их индукциями через обобщённую диэлектрическую восприимчивость $\varepsilon_{\text{full}}$ (1.14l). Согласно (1.14m),

$$\varepsilon_{\text{full}}^{ij} = \varepsilon \delta^{ij} + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \frac{\mu - 1}{\mu} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right). \quad (3.1d)$$

Поскольку $\varepsilon_{\text{full}}^{ij}$ действует на электрическое поле, смотри (1-4.1.1), дивергенция которого равна нулю, то в выписанном уравнении мы можем заменить круглую скобку на единицу, так что имеем окончательно

$$\varepsilon_{\text{full}} = \varepsilon + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \frac{\mu - 1}{\mu}. \quad (3.1e)$$

3-1.1 Дисперсионное соотношение

Исследуем теперь распространение плоских волн в изотропной среде. При исследовании линейных волн в неоднородной среде естественно перейти в Фурье-представление по времени и координате,

$$\mathbf{E}_{\omega \mathbf{k}} = \int dt d^3 r e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}). \quad (3.2a)$$

Можно сказать о том же по-другому: поскольку уравнения Максвелла линейны по полю, мы полагаем электромагнитное поле комплексным и зависящим от времени и координат как

$$\exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (3.2b)$$

Установим связь между волновым вектором $\mathbf{k}$ и частотой волны ω , которая называется дисперсионным уравнением. Для этого возьмём ротор от уравнения Максвелла на индукцию магнитного поля $\hat{\mu} \mathbf{H}$ (3.1b), получив

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \hat{\mu} \text{rot } \mathbf{H}, \quad (3.2c)$$

а затем воспользуемся уравнением на индукцию электрического поля $\hat{\varepsilon} \mathbf{E}$ (3.1b) и бездивергентностью электрического поля. В результате получим *волновое уравнение*

$$\left(\Delta - \frac{\partial_t^2 \hat{\varepsilon} \hat{\mu}}{c^2} \right) \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (3.2d)$$

В Фурье пространстве это уравнение переписывается в виде

$$\left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{c^2} \right) \mathbf{E} = 0, \quad (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad (3.2e)$$

где, напомним, функции отклика являются функциями частоты и волнового вектора, например $\varepsilon = \varepsilon(\omega, \mathbf{k})$. Для электрического поля существует нетривиальное (отличное от нуля) решение, если выполняется дисперсионное уравнение, а само поле удовлетворяет требованию поперечности

$$\mathbf{k}^2 - \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \quad (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = 0. \quad (3.2f)$$

В общем случае при действительной частоте волновой вектор волны оказывается комплексным. Разделим его действительную и мнимую части, представив волновой вектор волны в виде

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}'', \quad (3.2g)$$

где $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$ – действительные векторы. Разделяя действительную и мнимую части в уравнении (3.2f), получаем систему уравнений

$$k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \text{Re}(\varepsilon \mu), \quad 2\mathbf{k}' \mathbf{k}'' = \frac{\omega^2}{c^2} \text{Im}(\varepsilon \mu). \quad (3.2h)$$

3-1.2 Распространяющаяся плоская монохроматическая волна

Чаще всего под плоской волной подразумевают волну, в которой поле зависит только от одной координаты, так

что $\mathbf{k}' \parallel \mathbf{k}''$. Введём действительный единичный вектор $\mathbf{n}$, сонаправленный волновому вектору $\mathbf{k}$. Дисперсионное соотношение (3.2f) часто записывают в виде

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n}, \quad k = k' + ik'' = \beta(\omega), \quad \beta^2(\omega) = \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (3.3a)$$

где $\beta(\omega)$ называется *волновым числом* или *постоянной распространения*, а k' и k'' суть действительная и мнимая части волнового вектора.

3-1.2.1 Показатели преломления и поглощения

Для описания распространения волн в среде вместо непосредственно ε и μ (которые, будучи комплексными, содержат в себе 4 действительных параметра) часто выбирают пару действительных параметров — *показатель преломления* $\mathbf{n}$ (*refractive index*, или *index of refraction*) и *показатель поглощения* (*extinction coefficient*) $\mathbf{k}$, которые определяются через формулу

$$\mathbf{n} + i\mathbf{k} = \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad \beta = (\mathbf{n} + i\mathbf{k})\frac{\omega}{c}. \quad (3.3b)$$

Полное комплексное число $\mathbf{n} + i\mathbf{k}$ называется *комплексным показателем преломления* (*complex refractive index*). Особенно такая параметризация удобна, если известно, что среда немагнитная, т.е. $\mu = 1$. Тогда по $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$ можно однозначно восстановить ε .

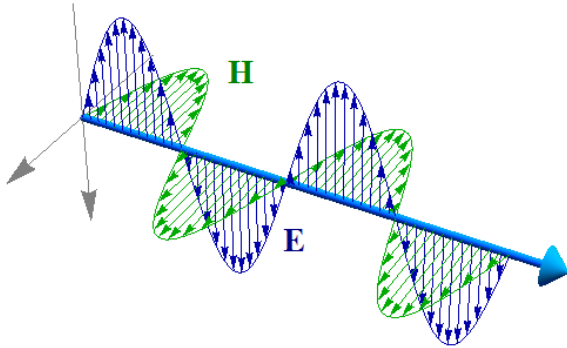


Рис. 3.1 Электромагнитное поле в линейно поляризованной плоской волне в случае прозрачной среды.

В частности, длина волны в среде λ (*wavelength*) и глубина её проникновения δ_p (*penetration depth*) равны

$$\lambda = \frac{2\pi}{k'} = \frac{\lambda_0}{\mathbf{n}}, \quad \delta_p = \frac{1}{2k''} = \frac{\lambda_0}{4\pi\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} \frac{\lambda}{4\pi}, \quad (3.3c)$$

где $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ — длина волны в вакууме на данной частоте. В определении δ_p мы добавили фактор 2. При таком определении интенсивность, пропорциональная квадрату амплитуды поля, на расстоянии δ_p падает в e раз; обратная величина $\alpha = 1/\delta_p$ [см⁻¹] называется *коэффициентом поглощения* (*absorption (attenuation) coefficient*). Если

$$\mathbf{k} \ll \mathbf{n}, \quad (3.3d)$$

то волна по мере распространения в среде успевает претерпеть много пространственных колебаний, прежде чем заметно ослабеть по интенсивности; в этом случае среда называется *прозрачной*.

Обычно прозрачные среды имеют положительные $\varepsilon, \mu > 0$, тогда показатель преломления также положителен, $\mathbf{n} > 0$. Однако в редких случаях возможен вариант, при котором прозрачная среда имеет отрицательные коэффициенты $\varepsilon, \mu < 0$. С учётом того, что у обоих коэффициентов $\varepsilon, \mu < 0$ малая мнимая часть положительна, то для того, чтобы показатель поглощения $\mathbf{k}$ был положителен, показатель преломления должен быть отрицательным, $\mathbf{n} < 0$.

3-1.2.2 Поляризации плоской волны

Из уравнений Максвелла получаем, что связь между компонентами электрического и магнитного полей задаётся равенствами

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = \zeta \mathbf{H}, \quad (\mathbf{n} + i\mathbf{k})[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = \mathbf{B}, \quad (3.3e)$$

где

$$\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon} \quad (3.3f)$$

называется *волновым импедансом*. Если ε и μ действительны, то это равенство справедливо не только для комплексных амплитуд, но и для самих действительных полей, см., например, Рис. 3.1. Если среда немагнитная, $\mu = 1$, то волновой импеданс равен обратному комплексному коэффициенту преломления, $\zeta = (\mathbf{n} + i\mathbf{k})^{-1}$. Принято также вводить величину

$$Z = \frac{4\pi\zeta}{c}, \quad (3.3g)$$

также называемую *волновым импедансом* и имеющую размерность электрического сопротивления. В системе СИ волновой импеданс вакуума

$$Z_{\text{vac}} = \frac{4\pi c_{\text{SI}}}{10^7} \approx 376 \text{ Ом}. \quad (3.3h)$$

Опишем произвольную поляризацию электромагнитной плоской волны в прозрачной среде. Пусть направлением распространения волны является Oz , так что $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Тогда ненулевыми остаются только 2 компоненты электрического поля $E_{\omega\mathbf{k}}^\beta$, $\beta = \{x, y\}$. Представим комплексную амплитуду волны в виде

$$\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} = e^{i\phi_0}(\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2), \quad (3.3i)$$

где чисто действительные вектора $\mathbf{E}_{1,2}$ ортогональны друг другу, причём $|\mathbf{E}_1| \geq |\mathbf{E}_2|$. Фаза ϕ_0 равна

$$\phi_0 = \frac{\arg(\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}})}{2}, \quad \text{if } (\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}) \neq 0.$$

После этого по известному $\mathbf{E}$ легко найти $\mathbf{E}_{1,2}$ выделением действительной и мнимой частей у $e^{-i\phi_0}\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}$. Если

окажется, что $\mathbf{E}_2 = 0$, то мы имеем дело с линейной поляризацией. Если $(\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}) = 0$, волна имеет одну из *двух круговых поляризаций*:

$$\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} = |\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}| \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} = |\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}| \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (3.3j)$$

при этом фазу ϕ_0 можно выбрать произвольной, при её изменении пара векторов $\mathbf{E}_{1,2}$ будет поворачиваться вокруг $\mathbf{n}$. В общем же случае $|\mathbf{E}_1| > |\mathbf{E}_2| > 0$ говорят, что волна имеет *эллиптическую поляризацию*. Например, при фиксированном времени конец вектора электрического поля $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ будет описывать эллипс с полуосями $\mathbf{E}_{1,2}$, если смещаться вдоль направления распространения волны.

3-1.3 Задачи

• **Задача 1:** Вычислить диэлектрическую проницаемость в частотном представлении $\varepsilon(\omega)$, если известно, что коэффициент поляризуемости (диэлектрическая восприимчивость) (1.14d) во временном представлении имеет зависимость $\chi(t) = A \exp(-t/\tau)$.

• **Задача 2:** Покажите, что для системы свободных зарядов при наличии трения (модель Друде) диэлектрическая проницаемость, как функция частоты,

может быть записана следующим образом:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}, \quad (3.4)$$

где ω_p — плазменная частота (и для модели плазмы n_e — концентрация зарядов, m_e — масса зарядов), а γ — декремент затухания.

Найдите диэлектрическую поляризуемость во временном представлении $\chi(t)$ (1.14d), соответствующую проницаемости (3.4). Объясните качественно поведение функции $\chi(t)$ на малых и больших временах.

• **Задача 3:** Найдите диэлектрическую проницаемость ε_ω для среды, состоящей из лорентцевых осцилляторов. Осциллятор представляет собой заряд e массы m , помещённый в потенциал. Резонансная частота осциллятора и скорость затухания его амплитуды колебаний суть ω_0 и $\gamma \ll \omega_0$. Концентрация осцилляторов равна n . Постройте графики действительной $\varepsilon'(\omega)$ и мнимой $\varepsilon''(\omega)$ частей диэлектрической проницаемости, а также относительной фазы между вектором поляризации и электрическим полем, отдельно уделив внимание их поведению в областях i) область низких частот $\omega_0 - \omega \gg \gamma$, ii) область резонанса $|\omega - \omega_0| \lesssim \gamma$, iii) область высоких частот $\omega - \omega_0 \gg \gamma$.

§3-2. Распространение волнового пакета в среде

Предположим, что электромагнитная волна распространяется вдоль оси Oz . Волновое уравнение, учитывающее временную дисперсию среды, имеет вид (3.2d)

$$\partial_z^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \int_0^\infty dt' \varepsilon(t') \mathbf{E}(t - t') + f(t, z), \quad (3.5)$$

где $\mathbf{E}$ — одна из компонент электрического поля. Под ядром ε в (3.5) может пониматься результат последовательного применения операторов $\hat{\mu}$ и $\hat{\varepsilon}$ в (3.2d), так что краткость записи (3.5) не ограничивает общности рассуждений. Сила f может играть роль внешнего источника, возбуждающего волну; свободное электромагнитное поле соответствует $f = 0$. Кроме того, в силу f можно включить нелинейную по электрическому полю часть поляризации $\mathbf{P}^{NL}$, положив таким образом $f = 4\pi \partial_t^2 \mathbf{P}^{NL}$. В Фурье-представлении уравнение (3.5) переписывается в виде

$$(k^2 - \beta^2(\omega)) \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} = -f_{\omega, \mathbf{k}}, \quad (3.6)$$

где волновой вектор определяется дисперсионным соотношением (3.3a). Для определённости мы предполагаем, что волна распространяется вправо, так что следует выбирать решение $\text{Re } \beta > 0$.

Волновым пакетом называется такая волна, распределение поля в которой слабо отличается от распределе-

ния поля в монохроматической волне с некоторой частотой ω_0 и волновым вектором k_0 , которые связаны между собой законом дисперсии в среде,

$$\omega_0 = \omega_0(k_0) \quad \text{or} \quad k_0 = \beta(\omega_0).$$

Для волнового пакета ω_0 называется *несущей частотой*, а k_0 — *несущим волновым вектором*. Таким образом, динамика поля в волновом пакете в первом приближении такая же, как и динамика поля в монохроматической волне. Тем не менее, обычно представляет интерес слабое отличие от этой динамики, которое возникает из-за слабого отличия волнового пакета от плоской волны (его слабой немонохроматичности). При этом часто оказывается удобным рассматривать волновой пакет как единое целое, не раскладывая его заранее по плоским волнам.

Для того, чтобы рассматривать импульсы с малой относительной спектральной шириной, нам не нужно знать всю зависимость $\beta(\omega)$ волнового вектора от частоты, а необходимо знать только несколько первых производных на несущей частоте $\omega = \omega_0$. Приняты следующие обозначение для этих производных:

$$\beta_m = \left. \frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_0}. \quad (3.7a)$$

Фазовая скорость. Фазовая скорость v_{ph} показывает, с какой скоростью движется гребень монохроматической волны:

$$v_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c}{n}, \quad (3.7b)$$

где n – коэффициент преломления. Мы предполагаем, что среда (почти) прозрачная, так что потерями пока пренебрегаем.

Групповая скорость. Если мы удержим в дисперсии $\beta(\omega)$ только первую производную по частоте, то $\beta(\omega)$ представляется в виде

$$\beta(\omega) = k_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_g}, \quad (3.7c)$$

где групповая скорость

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \equiv \frac{1}{\beta_1} \quad \text{or} \quad v_g = c \frac{d\omega}{d(n\omega)}. \quad (3.7d)$$

В англоязычной литературе также используется параметр *group index* n_g , который определяется как

$$n_g = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}, \quad v_g = \frac{c}{n_g}. \quad (3.7e)$$

Групповая скорость, как будет показано ниже, определяет скорость движения волнового пакета.

3-2.1 Выделение огибающей

Рассмотрим волновой пакет и введём понятие огибающей. Любое поле, скажем, электрическое, можно представить в частотно-пространственном представлении,

$$E(t, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (d\omega) E_{\omega}(z) e^{-i\omega t}, \quad (3.8)$$

где в силу вещественности поля $E(t)$ выполняется $E_{-\omega} = E_{\omega}^*$. Характерное время изменения *временной огибающей* $\tilde{E}(t)$

$$\tilde{E}(t) = \int_0^{+\infty} (d\omega) E_{\omega} e^{-i(\omega - \omega_0)t}, \quad (3.9)$$

$$E(t) = \tilde{E}(t) e^{-i\omega_0 t} + \tilde{E}^*(t) e^{i\omega_0 t} = 2 \operatorname{Re} (\tilde{E}(t) e^{-i\omega_0 t})$$

$$E_{\omega}(z) = \tilde{E}_{\omega - \omega_0}(z) + \tilde{E}_{\omega + \omega_0}^*(z)$$

является большим по сравнению с периодом колебания поля $2\pi/\omega_0$. Как следует из определения, комбинация $\tilde{E}(t) e^{-i\omega_0 t}$ имеет только положительные Фурье-гармоники. Иными словами, огибающая не содержит частот ниже $-\omega_0$, $\tilde{E}_{\omega < -\omega_0} = 0$ (Фурье-образ огибающей определяется аналогично (3.8)). Время изменения огибающей $\tilde{E}(t)$ оценивается как $1/\Delta\omega$, где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$

– характерная частота, на которой убывает $\tilde{E}_{\omega - \omega_0}$. Частота $\Delta\omega$ называется *спектральной шириной пакета*. Почти монохроматичность волнового пакета означает, что

$$\Delta\omega \ll \omega_0.$$

Распространим определение огибающей также и на пространственную координату. Электрическое поле в частотно-волновом представлении определяется согласно равенству

$$E(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} (dk) \int_{-\infty}^{\infty} (d\omega) E_{\omega, k} \exp\{-i\omega t + ikz\}, \quad (3.10)$$

где, например, $(dk) \equiv dk/2\pi$. По аналогии с (3.9) представим Фурье-компоненту электрического поля в виде

$$E_{\omega, k} = \Phi_{k - k_0, \omega - \omega_0} + \Phi_{k + k_0, \omega + \omega_0}^*,$$

$$E(t, z) = 2 \operatorname{Re} (e^{-i\omega_0 t + ik_0 z} \Phi(t, z)), \quad (3.11)$$

где абсолютное значение $|\Phi_{\omega, k}|$ Фурье-образа огибающей $\Phi_{\omega, k}$ имеет один максимум при нулевых значениях волнового вектора и частоты, и убывает на $k - k_0 \sim \Delta k$, $\omega - \omega_0 \sim \Delta\omega$. Ширина по волновому вектору также должна быть малой, так что

$$\Delta k \ll k_0.$$

В силу волнового уравнения неопределённости в волновом векторе Δk и $\Delta\omega$ связаны между собой через групповую скорость, так что верна оценка

$$\Delta\omega \sim v_g \Delta k.$$

3-2.2 Групповая скорость

Запишем волновое уравнение (3.6) в терминах огибающей Φ :

$$\left((k_0 - i\partial_z)^2 - (\beta(\omega_0 + i\partial_t))^2 \right) \Phi(t, z) = -f_+, \quad (3.12a)$$

где мы у силы f выделили огибающую f_+ ,

$$f = 2 \operatorname{Re} ((f_+(t, z) \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z))),$$

предполагая, что в Фурье-представлении $f_{\omega, k}$ имеет узкие максимумы там же, где и $E_{\omega, k}$. При получении уравнения (3.12a) мы пользовались соотношениями типа

$$\partial_z e^{ik_0 z} \Phi(z) = e^{ik_0 z} (ik_0 + \partial_z) \Phi(z),$$

$$\beta(i\partial_t) e^{-i\omega_0 t} \Phi(t) = e^{-i\omega_0 t} \beta(\omega_0 + i\partial_t) \Phi(t), \quad (3.12b)$$

$$\Phi(t - \tau) = e^{-\tau \partial_t} \Phi(t).$$

В силу узости спектральной ширины волнового пакета производные по времени и координате в (3.12a) следует воспринимать как малые поправки к ω_0 и k_0 соответственно.

Разложимся до первого порядка по этим поправкам и положим внешний источник нулём, $f = 0$. В результате получим уравнение

$$(v_g \partial_z + \partial_t) \Phi(t, z) = 0. \quad (3.12c)$$

Уравнение удовлетворяется, если огибающая зависит от времени и координаты только через комбинацию $z - v_g t$, то есть $\Phi = \Phi(z - v_g t)$. Таким образом, в этом, первом, приближении мы установили, что волновой пакет движется вправо со групповой скоростью v_g (3.7c).

3-2.3 Аналитические свойства диэлектрической проницаемости

Соотношения Крамерса-Кронига (7.9b, 7.9d) для диэлектрической проницаемости следует формулировать в терминах обобщённой восприимчивости $\alpha(\omega) = \varepsilon(\omega) - 1$, поскольку именно эта функция стремится к нулю на больших частотах. То же самое относится к магнитной восприимчивости, в качестве обобщённой восприимчивости следует брать $\mu(\omega) - 1$. Функция $\varepsilon\mu - 1$ также обладает свойствами обобщённой восприимчивости (произведение $\varepsilon\mu$ следует понимать как последовательное действие операторов типа (1.14b), что соответствует перемножению Фурье-образов в частотном представлении).

3-2.3.1 Среда с низким поглощением

Пусть в рассматриваемом диапазоне частот среда имеет низкое поглощение, так что мнимые части восприимчивостей можно принять равными нулю, $\varepsilon'' = 0$ и $\mu'' = 0$. Возьмём в качестве обобщённой восприимчивости $\alpha = \varepsilon - 1$ и вычислим полусумму общих неравенств (7.9f, 7.9g) для бездиссипативной среды. Получим

$$0 < \frac{d((\varepsilon - 1)\omega)}{d\omega} = \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} - 1. \quad (3.13a)$$

Таким образом, коэффициент, стоящий формуле Бриллюэна (3.35e) перед квадратом электрического поля не просто положителен, а

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} > 1. \quad (3.13b)$$

Аналогичные вычисления применимы для магнитной части запасённой энергии в (3.35e).

3-2.3.2 Групповая скорость в прозрачной среде

Для прозрачной среды можно получить ограничение на групповую скорость (3.7d), используя общие свойства обобщённой восприимчивости, установленные в § 7-2.

Если в качестве обобщённой восприимчивости взять $\alpha = \varepsilon\mu - 1$, то соотношения (7.9f, 7.9g) приводятся к неравенствам на групповую скорость (3.7d)

$$\frac{c}{v_g} \equiv \frac{d(n\omega)}{d\omega} > n, \quad \frac{c}{v_g} > \frac{1}{n} \quad (3.13c)$$

соответственно (групповая скорость есть скорость перемещения групповых пакетов, см. § 3-3). В (3.13c) предполагается, что показатель преломления положителен, $n > 0$. Таким образом, групповая скорость всегда не превосходит скорость света,

$$v_g < c \cdot \min(n, n^{-1}) = \min\left(v_{ph}, \frac{c^2}{v_{ph}}\right). \quad (3.13d)$$

3-2.3.3 Область низких частот для металлов

Металлы отличаются тем, что при постоянном электрическом поле в них возникает незатухающий со временем ток, см. (1.14e). Рассматривая сейчас изотропные среды, подставим определение проводимости (1.14e) в уравнение Максвелла. Получим, что в частотном представлении диэлектрическая проницаемость есть

$$\varepsilon = \frac{4\pi i}{\omega + i0} \sigma, \quad \sigma = -\frac{i\omega(\varepsilon - 1)}{4\pi}, \quad (3.13e)$$

сравни с общим выражением (1.14j), годящимся и для случая анизотропии. Смещение полюса у $\varepsilon(\omega)$ в нижнюю комплексную полуплоскость диктуется принципом причинности, см. (7.1j).

3-2.3.4 Предел высоких частот

Мнимая часть восприимчивости связана с резонансным поведением среды. Резонансы на частотах, значительно превышающих обратный Ридберг (далёкий ультрафиолет для лёгких элементов и рентгеновские частоты для тяжёлых элементов), обычно отсутствуют в среде. Это означает, что на таких больших частотах ω можно принять мнимую часть диэлектрической проницаемости равной нулю, $\varepsilon''(\omega) = 0$.

За относительно высокочастотные резонансы в среде отвечают электроны. Поэтому условие превышение частотой ω частот всех резонансов в среде равносильно тому, что ω превышает частоты движения электронов в этой среде. Если за v обозначить скорость электронов, а за a — характерное межатомное расстояние, то условие величины частоты волны есть $\omega \gg v/a$. При этом необходимо помнить, что концепция непрерывной среды остаётся в силе, пока межатомное расстояние a мало по сравнению с длиной волны. что накладывает на частоту ω в (3.13f) ограничение сверху $\omega \ll c/a$. Частота может удовлетворять обоим неравенствам одновременно, поскольку скорость движения электронов мала по сравнению со скоростью света, $v \ll c$.

Установим универсальное поведение диэлектрической проницаемости в этой области частот. Соотношение Крамерса-Кронига (7.9d) в пределе $\omega \gg \omega'$ даёт

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_\star^2}{\omega^2}, \quad \omega_\star^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\omega' \omega' \varepsilon''(\omega'). \quad (3.13f)$$

Второе слагаемое представляет собой малую поправку, так что диэлектрическая проницаемость оказывается немного меньше единицы.

3-2.4 Задачи

• **Задача 1:** Непосредственными вычислениями покажите, что неравенства (3.13с) на групповую скорость в изотропной прозрачной среде действительно следуют из общих неравенств (7.9f, 7.9g) на обобщённую восприимчивость, если взять $\alpha(\omega) = \varepsilon(\omega)\mu(\omega) - 1$ (рассмотрите

случай, когда пространственная дисперсия у ε и μ отсутствует).

• **Задача 2:** Рассмотрите распространение плоской электромагнитной волны в среде с диэлектрической проницаемостью (3.4), предполагая потери малыми, так что $\gamma \ll \omega_p$. Найдите дисперсию такой волны, фазовую и групповую скорости, а также длину распространения.

§3-3. Динамика формы волнового пакета в среде с дисперсией

Продолжим изучение динамики волновых пакетов с узкой спектральной шириной.

Приближение, приведшее нас к уравнению (3.12с), не улавливает изменения формы огибающей по мере распространения волнового пакета. Поэтому наша цель — переписать волновое уравнение (3.12а) в таком виде, который был бы удобен для описания эволюции волнового пакета. Для этого от лабораторной системы координат $\{t, z\}$ имеет смысл перейти в такую систему координат, у которой одна из координат пропорциональна комбинации $z - v_g t$; так мы будем рассматривать волновые пакеты,двигающиеся ‘в право’, то есть в сторону увеличения координаты z , и исключим их равномерное движение с групповой скоростью v_g . Вторая координата может быть выбрана в виде суммы исходных координат z, t с произвольными коэффициентами, конкретный выбор которых зависит от физической постановки задачи. Мы рассмотрим два варианта такого выбора: *сопровождающую систему координат* и *лабораторную запаздывающую систему координат*, см. Пункт 3-3.1.

3-3.1 Уравнение не форму пакета

Для определения динамики формы волнового пакета нам потребуется в уравнении на огибающую Φ (3.11) удерживать вклады, квадратичные по спектральной ширине пакета. Соответственно, нам потребуется знать параметр β_2 [с²/см] (3.7а), который называется *дисперсией групповой скорости*, в англоязычной литературе — *group delay dispersion*. Если на интересующей частоте он положителен, $\beta_2 > 0$, то говорят о нормальной дисперсии (*normal dispersion*). Если $\beta_2 < 0$, говорят об аномальной дисперсии (*anomalous dispersion*).

Часто вместо коэффициента β_2 пользуются другим коэффициентом D [с/см²],

$$D = \frac{d\beta_1}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda^2}, \quad (3.15a)$$

называемым коэффициентом хроматической дисперсией (*group delay parameter*). Как будет показано ниже, дисперсия групповой скорости определяет скорость расщепления волнового пакета.

3-3.1.1 Лабораторная запаздывающая система координат

Координаты этой системы $\{z_{\text{new}}, t_{\text{ret}}\}$ определяются согласно равенствам:

$$t_{\text{ret}} = t - z/v_g, \quad z_{\text{new}} = z. \quad (3.15b)$$

Смысл введённых новых координат следующий. Мы фиксируем положение приёмника, иными словами, координату z_{new} . Время же на этом приёмнике мы начинаем отсчитывать не от абсолютного значения, а от момента, когда в точку расположения приёмника придёт импульс, распространяющийся со скоростью v_g и пущенный из начала координат в нулевой момент времени по абсолютному его отсчёту. В итоге получаем, что форма волнового пакета определяется зависимостью огибающей от t_{ret} при фиксированном z_{new} , тогда как его эволюция происходит с ростом координаты z_{new} .

При такой замене переменных частные производные по z_{new} и t преобразуются по закону

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_{\text{new}}} - \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}}. \quad (3.15c)$$

Перепишем (3.12а) в лабораторной запаздывающей системе координат, разложившись до второго порядка малости по ширине волнового пакета:

$$\left(-2ik_0 \frac{\partial}{\partial z_{\text{new}}} + k_0 \beta_2 \left(\frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}} \right)^2 + \dots \right) \Phi = -f_+, \quad (3.15d)$$

где многоточием обозначены вклады, пропорциональные перекрёстной производной по $z_{\text{new}}, t_{\text{ret}}$ и второй производной по z_{new} .

Оценим характерное значение частных производных по координате и запаздывающему времени. Характерная величина производной по времени оценивается как

$$\frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}} \sim \Delta\omega \sim v_g \Delta k.$$

Переход от простого времени к запаздывающему приводит к тому, что в волновом уравнении на $\Phi_{\omega,k}$ исключается первая производная по времени, тогда как первая

производная по координате z не исчезает. Вследствие этого, оценкой для производной по координате является

$$v_g \frac{\partial}{\partial z_{\text{new}}} \sim \frac{1}{v_g} \left(\frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}} \right)^2 \sim \frac{\Delta k}{k_0} v_g \Delta k \ll \frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}}. \quad (3.15e)$$

Таким образом, уравнение на огибающую в лабораторной запаздывающей системе отсчёта приобретает вид уравнения Шредингера:

$$\left(-i\partial_z + \frac{\beta_2}{2} \partial_t^2 \right) \Phi = -\frac{1}{2k_0} f_+. \quad (3.15f)$$

При получении (3.15f) мы пренебрегли в (3.15d) высшими поправками по ширине импульса в соответствии с оценкой (3.15e) (эти поправки были уже скрыты многоточием). Мы также опустили индексы 'new' и 'ret' у координаты и запаздывающего времени. Отметим, что при выводе уравнения типа (3.15f), описывающего эволюцию волнового пакета, как раз удобно записывать закон дисперсии в виде $\beta = \beta(\omega)$.

3-3.1.2 Сопровождающая (движущаяся) система координат

Эта система координат $\{t_{\text{new}}, z_{\text{rel}}\}$

$$t_{\text{new}} = t, \quad z_{\text{rel}} = z - v_g t = -v_g t_{\text{ret}}$$

является, вероятно, более геометрически понятной: в ней мы наблюдаем изменение со временем пространственной структуры волнового пакета, двигаясь вместе с пакетом с групповой скоростью v_g . При использовании сопровождающей системы координат, наоборот, удобно записывать закон дисперсии в виде $\omega = \omega(\beta)$.

3-3.2 Задачи

• **Задача 1:** Волновой пакет на входе в волновод имел огибающую

$$\Phi_0(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_0}\right). \quad (3.16a)$$

Дана дисперсия групповой скорости β_2 . Определите огибающую волнового пакета (то есть $\Phi(z, t)$) в лабораторной запаздывающей системе координат после того, как пакет пройдёт расстояние z .

Решение: Наличие ненулевой дисперсии приводит к распылению волнового пакета. Огибающая и в последующие моменты времени имеет гауссов вид, но с зависящим от эволюционной координаты z параметром $\sigma = \sigma(z)$:

$$\Phi(z, t) = \frac{\sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma}\right). \quad (3.16b)$$

Используя (3.15f) с нулевой правой частью получаем уравнение на величину σ ,

$$\frac{d\sigma}{dz} = i\beta_2. \quad (3.16c)$$

Ширина волнового пакета равна $|\sigma|/\sqrt{\text{Re } \sigma}$, и, согласно уравнению (3.16c), на больших временах начинает расти линейно со временем.

• **Задача 2:** Получите уравнение на огибающую в сопровождающей (движущейся) системе координат, в которой одной из координат является $z_{\text{rel}} = z - v_g t$, а другой координатой — t .

• **Задача 3:** Пусть в начальный момент времени огибающая плоского волнового пакета в сопровождающей системе координат имела гауссову зависимость: $\Phi(z, t = 0) = \exp(-z^2/2\zeta^2)$, где ζ/v_g — длительность импульса, v_g — групповая скорость. Найти дальнейшую эволюцию огибающей, если известна вторая дисперсия β_2 . Нарисовать график огибающей (действительной и мнимой частей, желательно компьютерной программой для выявления всех характерных особенностей кривых) при $t = 30\zeta^2/(v_g^3\beta_2)$ в интервале $z \in [-100\zeta, 100\zeta]$.

§3-4. Электромагнитные волны в анизотропных средах

Рассмотрим распространение плоской монохроматической электромагнитной волны в анизотропной однородной прозрачной среде. В прозрачных средах отсутствует поглощение, то есть тензора диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости являются эрмитовыми матрицами,

$$\varepsilon^{*ik} = \varepsilon^{ki}, \quad \mu^{*ik} = \mu^{ki}, \quad (3.17a)$$

см. Пункт 3-7.2. Из симметрии кинетических коэффициентов (1.15d) следует, что в тензорах (3.17a) симметричная часть, которая действительна вследствие эрмитовости (3.17a), чётна по среднему магнитному полю,

а антисимметричная часть, которая является мнимой вследствие эрмитовости (3.17a), нечётна по магнитному полю. В частности, если среда является немагнитной, мнимая часть тензоров (3.17a) отсутствует, то есть тензора являются симметричными действительными матрицами:

$$\varepsilon^{*ik} = \varepsilon^{ik} = \varepsilon^{ki}, \quad \mu^{*ik} = \mu^{ik} = \mu^{ki}, \quad (3.17b)$$

В этом параграфе мы главным образом будем изучать немагнитные среды. Магнитные среды будут отдельно рассмотрены в § 3-6. Для немагнитных сред обычно и магнитная восприимчивость рана единице,

то есть отклик среды на электромагнитное поле определяется исключительно симметричной действительной матрицей диэлектрической проницаемости ε^{ik} . Для этой матрицы можно так выбрать ориентацию декартовой системы координат, что она примет диагональный вид:

$$\hat{\varepsilon} = \text{diag}(\varepsilon^{(x)}, \varepsilon^{(y)}, \varepsilon^{(z)}). \quad (3.17c)$$

Снова положим, что электромагнитное поле зависит от времени и координат как $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$. Введём стандартное обозначение

$$\mathbf{n} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k}. \quad (3.18)$$

Поскольку мы интересуемся прозрачными средами и распространяющимися волнами, то вектор $\mathbf{n}$ является чисто действительным. Обратим внимание, что длина вектора $\mathbf{n}$ не равняется единице; в изотропной среде его длина равнялась бы коэффициенту преломления. Перепишем уравнения Максвелла (1.14h) для плоской волны в векторном виде:

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{H}] = -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}, \quad [\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{B} \quad (3.19a)$$

или

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] = -\mathbf{D}, \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = \mathbf{B}, \quad (3.19b)$$

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \hat{\mu} \mathbf{H}, \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) = 0.$$

В результате исключения магнитного поля, получаем *волновое уравнение*

$$\left(\varepsilon^{imk} \varepsilon^{jnl} (\hat{\mu}^{-1})^{mn} k^k k^l - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{ij} \right) E^j = 0. \quad (3.20a)$$

записанное в данном случае в Фурье-пространстве. В частном случае, когда среда не обладает магнитными свойствами, магнитная индукция равна магнитному полю, $\mathbf{H} = \mathbf{B}$. Тогда волновое уравнение (3.20a) упрощается до

$$\left(k^2 \delta^{ik} - k^i k^k - \varepsilon^{ik}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\omega^2}{c^2} \right) E^k = 0. \quad (3.20b)$$

Уравнение (3.20b) верно и в общем случае произвольных магнитных свойств среды, если в качестве диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ подразумевать величину $\hat{\varepsilon}_{\text{full}}$, описывающую полный линейный электромагнитный отклик среды на поле волны (1.14m).

3-4.1 Уравнение Френеля

Рассматриваем немагнитную среду.

Зафиксируем частоту в уравнении (3.20b) и поделим круглую скобку на ω^2/c^2 . Тем самым, мы перейдём к записи в терминах вектора $\mathbf{n}$ (3.18). Потребуем существование нетривиального решения для электрического

поля, то есть найдём дисперсионное уравнение. В терминах вектора $\mathbf{n}$ дисперсионное уравнение имеет вид

$$\det(\mathbf{n}^2 \delta^{ij} - \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j - \varepsilon^{ij}(\omega, \omega \mathbf{n}/c)) = 0. \quad (3.21)$$

Вычислить детерминант удобно в координатах, где тензор диэлектрической проницаемости является диагональным, см. (3.17c). В этой системе координат компоненты вектора $\mathbf{n}$ удовлетворяют уравнению

$$\sum_i \varepsilon^{(i)} |\mathbf{n}_i|^2 \left(|\mathbf{n}|^2 - \sum_{j \neq i} \varepsilon^{(j)} \right) + \varepsilon^{(x)} \varepsilon^{(y)} \varepsilon^{(z)} = 0. \quad (3.22)$$

Это — уравнение 4-го порядка относительно компонент вектора $\mathbf{n}$, если не принимать во внимание возможную зависимость от него тензора диэлектрической восприимчивости. Уравнение (3.22) называется *уравнением Френеля (Fresnel equation)*. Вообще говоря, при фиксированных направлении вектора $\mathbf{n}$ и частоте ω у уравнения Френеля существует два положительных решения для абсолютного значения вектора $|\mathbf{n}|$, соответствующие двум поляризациям (а два решения с противоположным знаком соответствуют волнам, распространяющимся в противоположном направлении). То, что шестой порядок в (3.22) сократился, не является случайностью и говорит об отсутствии волны с третьей поляризацией.

3-4.2 Распространение лучей

Существует в общем случае две функции $\omega = \omega_{1,2}(\mathbf{k})$ для описания законов дисперсии двух поляризаций. Рассмотрим одну из них, опуская индекс '1,2'. Групповая скорость

$$\mathbf{v}_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} \quad (3.23)$$

направлена ортогонально поверхности $\omega = \text{const}$ в пространстве компонент волнового вектора.

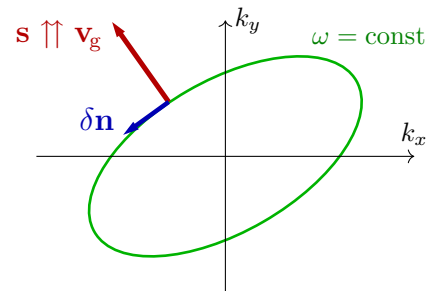


Рис. 3.2 Поверхность постоянной частоты в пространстве волновых векторов для некоторой фиксированной поляризации.

3-4.2.1 Вектор Умова-Пойнтинга

В этом пункте 3-4.2.1 рассмотрение применимо на любые прозрачные среды, включая магнитные.

Продемонстрируем, что поток энергии в волне, который определяется вектором Умова-Пойнтинга (3.34с)

$$\mathbf{S} = \frac{c}{2\pi} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*], \quad (3.24a)$$

действительно сонаправлен групповой скорости $\mathbf{v}_g$ (3.23). Проварьируем уравнения Максвелла (3.19b), удерживая постоянной частоту ω . Тогда вариацию можно проводить над уравнениями (3.19b), записанными в терминах вектора $\mathbf{n}$, причём его вариация $\delta\mathbf{n}$ направлена по касательной к поверхности $\omega = \text{const}$, см. Рис. 3.2. Результат вариации

$$\begin{aligned} [\delta\mathbf{n} \times \mathbf{H}] + [\mathbf{n} \times \delta\mathbf{H}] &= -\delta\mathbf{D}, \\ [\delta\mathbf{n} \times \mathbf{E}] + [\mathbf{n} \times \delta\mathbf{E}] &= \delta\mathbf{B}. \end{aligned} \quad (3.24b)$$

Посчитаем теперь комбинацию, пропорциональную изменению запасённой энергии (3.34b) при реальном изменении полей:

$$\operatorname{Re} \left((\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}^*) + (\mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B}^*) \right) = \quad (3.24c)$$

$$= 2(\delta\mathbf{n} \cdot \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]) + \operatorname{Re} \left((\mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{E}^*) + (\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{H}^*) \right)$$

В процессе преобразований мы снова пользовались (3.19b), а также тем, что вектор $\mathbf{n}$ является действительным. Теперь, в правой части (3.24c) во втором слагаемом будем полагать, что тензора $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ зависят только от частоты, но не от волнового вектора. Тогда их вариация равна нулю. В силу прозрачности среды (3.17a)

$$(\mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{E}^*) = \varepsilon^{ik} \mathbf{E}^k \delta\mathbf{E}^{*i} = \mathbf{E}^k \varepsilon^{*ki} \delta\mathbf{E}^{*i} = (\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}^*), \quad (3.24d)$$

и то же самое для магнитного поля. Таким образом, второе слагаемое в правой части (3.24c) равно всей левой части, т.е. первое слагаемое в правой части (3.24c) равно нулю:

$$\delta\mathbf{n} \cdot \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] = 0. \quad (3.24e)$$

Значит, вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ направлен нормально по отношению к поверхности $\omega = \text{const}$, т.е. вдоль вектора групповой скорости $\mathbf{v}_g$.

3-4.2.2 Лучевой вектор

Введём *лучевой вектор* $\mathbf{s}$, который по определению сонаправлен групповой скорости, а его амплитуда удовлетворяет уравнению

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}) = 1, \quad \mathbf{s} \uparrow\uparrow \mathbf{v}_g. \quad (3.25a)$$

Лучи в кристалле распространяются вдоль направления групповой скорости, т.е. и вдоль лучевого вектора.

Длина же вектора $|\mathbf{s}|$ имеет смысл обратного показателя преломления $1/n$ для данного волнового вектора и поляризации. Действительно, набег фазы ψ в результате пробега волной расстояния $\mathbf{l} \uparrow\uparrow \mathbf{s}$ есть

$$\mathbf{n}(\omega/c)\mathbf{l} \equiv \psi = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) = \frac{\omega}{c} \frac{l}{|\mathbf{s}|} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}) = \frac{(\omega/c)l}{|\mathbf{s}|}. \quad (3.25b)$$

Подчеркнём, что в общем случае эффективный показатель преломления n не равен модулю вектора $\mathbf{n}$.

Преимущество вычислений в терминах $\mathbf{s}$ по сравнению с групповой скоростью состоит в том, что вектор $\mathbf{s}$ можно найти непосредственно, не прибегая к дифференцированию закона дисперсии. При этом, разумеется, величина групповой скорости остаётся не найденной.

Вернёмся к ограничению нашего рассмотрения на немагнитные среды. Уравнение на лучевой вектор $\mathbf{s}$ аналогично уравнению Френеля (3.22). Действительно, поскольку лучевой вектор сонаправлен вектору Пойнтинга, то он ортогонален векторам электрического и магнитного полей,

$$(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{H}) = 0, \quad \mathbf{E} = \hat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{D}, \quad \mathbf{H} = \hat{\mu}^{-1} \mathbf{B}. \quad (3.25c)$$

Далее, домножив векторно уравнения Максвелла (3.19b) на лучевой вектор $\mathbf{s}$ и воспользовавшись (3.25c) и условием (3.25a), получим

$$[\mathbf{s} \times \mathbf{D}] = \mathbf{H}, \quad [\mathbf{s} \times \mathbf{B}] = -\mathbf{E}. \quad (3.25d)$$

Мы видим, что уравнения (3.25c, 3.25d) воспроизводят уравнения Максвелла записанные в форме (3.19b), если совершить замены

$$\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{D}, \quad \mathbf{n} \leftrightarrow \mathbf{s}, \quad \hat{\varepsilon} \leftrightarrow \hat{\varepsilon}^{-1}, \quad \hat{\mu} \leftrightarrow \hat{\mu}^{-1}. \quad (3.25e)$$

В частности, уравнение Френеля (3.22) в терминах лучевого вектора переписывается в виде

$$\sum_i |\mathbf{s}_i|^2 \left(\prod_{j \neq i} \varepsilon^{(j)} |\mathbf{s}|^2 - \sum_{j \neq i} \varepsilon^{(j)} \right) + 1 = 0. \quad (3.25f)$$

3-4.3 Поляризации волн в немагнитных средах

Для немагнитных сред собственные вектора симметричной действительной матрицы в волновом уравнении (3.20a) могут быть всегда выбраны чисто действительными. Таким образом, в немагнитных средах поляризации волн всегда являются линейными. Отметим, что для частного случая изотропной среды возможные эллиптические поляризации плоской волны являются следствием вырождения и могут быть представлены как линейная комбинация линейных поляризаций.

§3-5. Одноосный кристалл

Литература: Ландау и Лифшиц, 1982, § 98.

В одноосном кристалле тензор диэлектрической проницаемости обладает аксиальной симметрией. Ось симметрии называют *оптической осью*. Введём декартову систему координат $Oxyz$, ось Oz которой совпадает с оптической осью. В этой системе координат тензор диэлектрической проницаемости записывается в виде

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

3-5.1 Задачи

• **Задача 1:** Установить симметрию диэлектрической проницаемости в случае, если среда прозрачна и её внутренняя симметрия характеризуется выделенным направлением. Также обсудить ситуацию, когда исходно

изотропное тело помещено в однородное электрическое поле (эффект Керра).

• **Задача 2:** Главная ось одноосного кристалла направлена вдоль оси Oz декартовой системы координат. Диэлектрические проницаемости кристалла равны $\varepsilon_{\perp} = 2$, $\varepsilon_{\parallel} = 2.2$. Боковая поверхность этого кристалла совпадает с плоскостью Oxz , кристалл находится в области $y < 0$. Луч линейно поляризованного монохроматического света падает на поверхность в плоскости Oyx под углом $\pi/4$ (направление распространения $\mathbf{k}_{\text{in}} \propto (1, -1, 0)$). Направление поляризации в падающей волне таково, что комплексная амплитуда вектора электрического поля в ней $\mathbf{E}_{\text{in}} \propto (1, 1, \sqrt{2})$. Найдите в каком направлении будут распространяться прошедшие обыкновенная и необыкновенная волны. Нарисуйте чертёж, который бы демонстрировал найденные углы распространения. *Указание:* в качестве граничных условий на поверхности надо требовать сохранения частоты и касательной к поверхности компоненты волнового вектора.

§3-6. Магнитооптика

Рассмотрим среду, которая является изотропной в состоянии покоя. В частности, в состоянии покоя тензор диэлектрической проницаемости среды пропорционален единичной матрице. Наложим внешнее постоянное магнитное поле на эту среду. В результате изотропия окажется нарушенной, поскольку в среде теперь есть выделенное направление — направление магнитного поля.

Zvezdin и Kotov [1997]

3-6.1 Феноменология

Предположим, что среда в отсутствии магнитного поля при интересующих нас частотах является прозрачной. Тогда можно ожидать, что при наложении магнитного поля среда по-прежнему останется прозрачной. В этом случае диэлектрическая проницаемость ε^{ij} в присутствии магнитного поля имеет следующую структуру

$$\varepsilon^{ij} = \varepsilon_t (\delta^{ij} - h^i h^j) + \varepsilon_l h^i h^j + i\varepsilon_a \varepsilon^{ijk} h^k, \quad (3.27)$$

где единичный вектор $h^i = \mathbf{H}_0 / |\mathbf{H}_0|$ направлен вдоль постоянного магнитного поля, коэффициенты ε_t , ε_l являются функциями квадрата магнитного поля $\mathbf{H}_0^2$, $\varepsilon_a = \varepsilon_a(|\mathbf{H}_0|)$ — нечётная функция аргумента (нечётность по полю $\mathbf{H}_0$ последнего слагаемого в (3.27) достигается за счёт наличия в качестве множителя вектора $\mathbf{h}$). Вид (3.27) продиктован обобщённым принципом симметрии кинетических коэффициентов (см. Пункт 7-1.3)

$$\varepsilon^{ji}(-\mathbf{H}_0) = \varepsilon^{ij}(\mathbf{H}_0)$$

и предположением об отсутствии диссипации, которое выражается условием (3.34g):

$$\varepsilon^{*ji} = \varepsilon^{ij}.$$

При этом в записи (3.27) мы выделили чётную и нечётную по магнитному полю части. Если выбрать декартову систему координат, у которой ось Oz направлена вдоль (или против) магнитного поля, то (3.27) в матричном виде будет иметь вид

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_t & i\varepsilon_a & 0 \\ -i\varepsilon_a & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_l \end{pmatrix},$$

где H_0 есть z -компонента магнитного поля, и теперь $\varepsilon_a = \varepsilon_a(H_0)$.

3-6.2 Эффект Фарадея

Продольный магнитооптический эффект Фарадея заключается в том, что линейно поляризованный свет, распространяющийся вдоль магнитного поля, испытывает вращение плоскости поляризации при прохождении через среду, обладавшую изотропией в отсутствии магнитного поля. Это означает, что две круговые поляризации света распространяются с разными фазовыми скоростями.

Найдём связь этих эффектов с константами ε_t и ε_a . Направим ось Oz декартовой системы координат по

магнитному полю $\mathbf{H}_0$. Для волны, распространяющейся вдоль магнитного поля, компонента электромагнитной индукции $D^z = 0$. В силу вида тензора диэлектрической проницаемости (3.27) электрическое поле волны также направлено нормально к полю. Поэтому волновое уравнение (3.20b) для нашего частного случая переписывается в виде

$$\left(((ck)^2 - \omega^2 \varepsilon_t) \delta^{ik} - i\omega^2 \varepsilon_a \epsilon^{ik} \right) E^k = 0, \quad (3.28)$$

где единичный антисимметричный тензор определён согласно равенствам $\epsilon^{ik} = -\epsilon^{ki}$, $\epsilon^{12} = 1$. Решением этого уравнения являются две круговые поляризации $E_{\omega\pm}$, распространяющиеся с волновыми векторами $k_{\pm}$:

$$\mathbf{E}_{\omega\pm} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}, \quad k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_t \pm \varepsilon_a}, \quad (3.29)$$

где для вектора поляризации приведены только xy -компоненты.

Если исходно (в точке $z = 0$) поляризация поля была линейной и направленной по оси Ox , то в ходе распространения волны получаем, что её поляризация меняется согласно закону

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\omega}(z) &\propto \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{ik_+z} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{ik_-z} \propto \\ &\propto e^{ikz} \begin{pmatrix} \cos(\delta k z) \\ \sin(\delta k z) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где средний волновой вектор $k = (k_+ + k_-)/2$, а разность волновых векторов $\delta k = (k_+ - k_-)/2$. Таким образом, поляризация линейно поляризованного света действительно поворачивается в процессе прохождения через рассматриваемую среду.

При относительно слабом магнитном поле можно считать, что антисимметричная добавка в тензор диэлектрической проницаемости мала, $\varepsilon_a \ll \varepsilon_t$, а сама величина ε_t слабо отличается от величины диэлектрической проницаемости ε_0 в отсутствие магнитного поля. Тогда обратный период поворота вектора поляризации даётся выражением,

$$\delta k = \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_a}{2\sqrt{\varepsilon_0}}. \quad (3.31)$$

Если справедливо предположение, что при уменьшении магнитного поля ε_a стремится к постоянному значению, то из (3.31) следует, что период поворота вектора поляризации волны обратно пропорционален магнитному полю.

3-6.3 Задачи

• **Задача 1:** Установить симметрию диэлектрической проницаемости в случае, если среда прозрачна

и её внутренняя симметрия характеризуется выделенным направлением, обусловленным наложенным постоянным магнитным полем (в отсутствие магнитного поля среда изотропна). *Литература:* § 3-6.

• **Задача 2:** Найти явный вид диэлектрической проницаемости для идеальной классической плазмы, находящейся в однородном магнитном поле $\mathbf{H}_0$. Концентрация зарядов (электронов) равна n , их заряд равен e , их масса — m . Рассмотрите распространение линейных волн вдоль магнитного поля (обе поляризации) и поперёк него (с линейной поляризацией направленной вдоль магнитного поля).

Решение: Эта задача разобрана в Векштейн [1966, задачи 3.27-3.29].

Полное электромагнитное поле складывается из электромагнитного поля (электрическое поле $\mathbf{E}$ и магнитное поле $\mathbf{H}$) волны и магнитного поля $\mathbf{H}_0$. Интенсивность волны мала, так что её магнитное поле много меньше постоянного магнитного поля, $H \ll H_0$. Уравнение движение электрона

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{H}_0]. \quad (3.32a)$$

К этому уравнению надо добавить уравнения на электромагнитное поле:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = ne\dot{\mathbf{r}}, \quad (3.32b)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{H}.$$

Рассмотрим частную ситуацию, когда волновой вектор распространяющейся направлен по магнитному полю, так что все поля имеют зависимость $\exp(-i\omega t + ikz)$. В этом случае волна является чисто поперечной. В результате уравнения Максвелла и уравнение движения плазмы запишутся в следующем виде

$$-ick\hat{\epsilon}\mathbf{H}_{\perp} = -i\omega\mathbf{E}_{\perp} + 4\pi\mathbf{j}_{\perp}, \quad \mathbf{j}_{\perp} = -i\omega n e \mathbf{r}_{\perp}$$

$$-ick\hat{\epsilon}\mathbf{E}_{\perp} = i\omega\mathbf{H}_{\perp}$$

$$-m\omega^2\mathbf{r}_{\perp} = e\mathbf{E}_{\perp} - \frac{i e \omega H_0}{c} \hat{\epsilon} \mathbf{r}_{\perp}, \quad \hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Из уравнения на движение частиц плазмы можно выразить вектор смещения частиц через электрическое поле,

$$\mathbf{E}_{\perp} = -\frac{m}{e} \omega (\omega - i\omega_H \hat{\epsilon}) \mathbf{r}_{\perp}, \quad \omega_H = \frac{eH_0}{mc}, \quad (3.32c)$$

$$\mathbf{r}_{\perp} = -\frac{e}{mc(\omega^2 - \omega_H^2)} (\omega + i\omega_H \hat{\epsilon}) \mathbf{E}_{\perp} \quad (3.32d)$$

После этого подставим этот результат в первое уравнение, выразив также магнитное поле через электрическое. В результате получим:

$$\left(c^2 k^2 - \omega^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega(\omega + i\omega_H \hat{\epsilon})}{\omega^2 - \omega_H^2} \right) \right) \mathbf{E}_{\perp} = 0 \quad (3.32e)$$

Уравнение (3.32e) надо сравнить с общим волновым уравнением в анизотропной среде (3.20b), учтя, что в

нашем случае электрическое поле является полностью поперечным, $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = 0$. Теперь, сравнивая общее выражение для тензора диэлектрической проницаемости для исходно изотропной среды в магнитном поле (3.27) и полученный результат (3.32e), заключаем, что коэффициенты ε_s и ε_a в (3.27) суть

$$\varepsilon_t = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad \varepsilon_a = -\frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}. \quad (3.32f)$$

Последнюю компоненту тензора диэлектрической проницаемости легко получить заметив, что магнитное поле не влияет на движение электронов вдоль него самого, то есть

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (3.32g)$$

• **Задача 3:** Вычислить законы дисперсии для двух круговых поляризаций волны, распространяющейся вдоль магнитного поля в идеальной плазме (эффект Фарадея).

Решение: Решением уравнения (3.32e) являются две круговые поляризации (3.29), которым соответствуют волновые вектора

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_H)}}. \quad (3.32h)$$

• **Задача 4:** Определите величину эффекта Фарадея для плазмы в слабом магнитном поле, вычислив разность волновых векторов для двух круговых поляризаций (3.30). Пусть магнитное поле направлено вдоль оси Oz и в этом же направлении распространяется электромагнитная линейно поляризованная волна. В каком направлении (по или против часовой стрелки) будет вращаться поляризация этой волны по мере её распространения, если смотреть со стороны больших значений координаты z ?

Если частота волны и ларморовская частота много меньше плазменной частоты, то

$$k_{\pm} = \frac{i\omega_p}{c} \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\omega \pm \omega_H}}$$

Это означает, что ...

• **Задача 5:** Показать, что при распространении радиоволн в ионосфере следует ожидать резонансных явлений близи длины волны $\lambda \approx 210$ м. Принять напряжённость магнитного поля земли $H = 0.5$ э.

§3-7. Энергия поля в диспергирующих средах

Рассмотрим неподвижную непрерывную среду, в которой возбуждено переменное электромагнитное поле. В этом параграфе мы изучим поток и плотность энергии, связанные с электромагнитным полем, а также скорость диссипации этой энергии в тепло.

Прежде всего запишем плотность потока энергии, связанного с электромагнитным полем в среде — вектор Пойнтинга (или Умова-Пойнтинга) $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (3.33a)$$

В справедливости этого выражения можно убедиться, рассмотрев границу раздела двух сред. Нормальная компонента потока энергии должна быть непрерывна при переходе через границу, и выражение (3.33a) — единственное, удовлетворяющее этому условию, поскольку на границе раздела остаются непрерывными тангенциальные компоненты именно электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитного поля $\mathbf{H}$, см. (1.10).

В случае, когда речь идёт о почти монохроматическом электромагнитном поле, имеющем частоту близкую к ω_0 , можно переписать формулу (3.33a), усреднив её по периоду колебаний поля. Выделим у всех полей огибающую по времени (например, для электрического поля — $\tilde{\mathbf{E}}(t)$), как это было сделано в Пункте 3-2.1, см.

(3.9):

$$\mathbf{E}(t) = 2 \operatorname{Re} (\tilde{\mathbf{E}}(t) e^{-i\omega_0 t}). \quad (3.33b)$$

В результате усреднения исчезают слагаемые, осциллирующие с двойной частотой $2\omega_0$, и мы получаем

$$\mathbf{S} = \frac{c}{2\pi} \operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*]. \quad (3.33c)$$

В частном случае плоской бегущей монохроматической волны вектор Пойнтинга сонаправлен с её волновым вектором $\mathbf{n}$,

$$\mathbf{S} = \frac{c \operatorname{Re} (1/\zeta)}{2\pi} |\tilde{\mathbf{E}}|^2 \mathbf{n} = \frac{c \operatorname{Re} \zeta}{2\pi} |\tilde{\mathbf{H}}|^2 \mathbf{n}, \quad (3.33d)$$

где волновой импеданс ζ определён в (3.3f). Мы воспользовались соотношениями (3.3e) для полей в плоской волне.

3-7.1 Мощность, выделяемая в единице объёма

Мгновенное значение дивергенции от потока энергии должно быть равно мощности W , передаваемой единице объёма со знаком минус:

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = -\frac{\partial W}{\partial t}. \quad (3.34a)$$

Используя уравнения Максвелла в среде, получаем, что

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \mathbf{S} &= \frac{\mathbf{E} \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{H} \partial_t \mathbf{B}}{4\pi} = \\ &= \frac{\partial_t (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)}{4\pi} + \mathbf{E} \partial_t \mathbf{P} - \mathbf{M} \partial_t \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (3.34b)$$

При выводе мы полагали, что внешние заряды отсутствуют, $\mathbf{j}_{\text{ext}} = 0$. Для почти монохроматического поля результат усреднения (3.34b) по периоду колебаний есть

$$\partial_t W = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\tilde{\mathbf{E}}((\partial_t - i\omega_0)\tilde{\mathbf{D}})^* + \tilde{\mathbf{H}}((\partial_t - i\omega_0)\tilde{\mathbf{B}})^* \right). \quad (3.34c)$$

3-7.2 Скорость диссипации энергии

Для того, чтобы посчитать скорость диссипации Q электромагнитной энергии в тепло, следует рассмотреть постоянную монохроматическую волну. Тогда скорость диссипации

$$Q = \partial_t W = -\operatorname{div} \mathbf{S},$$

поскольку при постоянстве амплитуды колебаний поля вся уходящая в единицу объёма мощность переходит в тепло. Из (3.34c) получаем

$$\partial_t W = \frac{\omega}{2\pi} \operatorname{Im} \left((\tilde{\mathbf{E}}^* \cdot \tilde{\mathbf{D}}) + (\tilde{\mathbf{H}}^* \cdot \tilde{\mathbf{B}}) \right). \quad (3.34d)$$

Пусть теперь среда обладает линейным откликом (1.14a). Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} Q &= \\ &= \frac{\omega}{4\pi i} \left((\varepsilon^{*ki} - \varepsilon^{ik}) \tilde{\mathbf{E}}^{*k} \tilde{\mathbf{E}}^i + (\mu^{*ki} - \mu^{ik}) \tilde{\mathbf{H}}^i \tilde{\mathbf{H}}^{*k} \right) = \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \left(\varepsilon_a^{ik} \tilde{\mathbf{E}}^{*i} \tilde{\mathbf{E}}^k + \mu_a^{ik} \tilde{\mathbf{H}}^{*i} \tilde{\mathbf{H}}^k \right), \end{aligned} \quad (3.34e)$$

где разложение тензоров на эрмитову и анти-эрмитову части определено в (1.15c). Если среда изотропна, так что имеет место (3.1a), то выражение для скорости диссипации (3.34e) упрощается до

$$Q = \frac{\omega}{2\pi} \left(\varepsilon'' |\tilde{\mathbf{E}}|^2 + \mu'' |\tilde{\mathbf{H}}|^2 \right). \quad (3.34f)$$

Для того, чтобы колебания электромагнитного поля на частоте ω не испытывали диссипации в среде, необходимо, чтобы анти-эрмитовы части диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости на данной частоте были нулевыми, т.е. чтобы выполнялись равенства

$$\varepsilon^{*ki}(\omega) = \varepsilon^{ik}(\omega), \quad \mu^{*ki}(\omega) = \mu^{ik}(\omega). \quad (3.34g)$$

Отметим, что условие (3.34g) является только необходимым, но не достаточным для того, чтобы среда оказалась прозрачной, см. Пункт 3-1. При выполнении условий (3.34g) произведение $\varepsilon\mu$ может оказаться действительной отрицательной величиной – в этом случае среда

не будет прозрачной, хотя поглощение в ней будет отсутствовать.

Наконец рассмотрим случай волнового пакета, когда время действия электрического поля конечно. Тогда имеет смысл говорить об объёмной плотности полного тепла W , выделившегося в единице объёма. Для упрощения записи возьмём частный случай изотропной среды, тогда

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt Q = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (d\omega) \left(\omega \varepsilon''(\omega) |\mathbf{E}_\omega|^2 + \omega \mu''(\omega) |\mathbf{H}_\omega|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.34h)$$

3-7.2.1 Условие неотрицательности диссипации

Требование неотрицательности диссипации (3.34e) накладывает ограничение на анти-эрмитовы части диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости: у матриц ε_a^{ik} и μ_a^{ik} (которые, напомним, являются эрмитовыми матрицами) должны быть только неотрицательные собственные значения. В частности, если среда является изотропной, то должно быть

$$\varepsilon'' \geq 0, \quad \mu'' \geq 0. \quad (3.34i)$$

3-7.3 Энергия электромагнитных волн

Рассмотрим почти монохроматическую волну с несущей частотой ω_0 . Будем предполагать, что амплитуда электромагнитного поля медленно увеличивается во времени, причём при $t \rightarrow -\infty$ она была равна нулю. Для удобства выкладок положим, что она возрастала экспоненциально, пропорционально $\exp(\gamma t)$ с малым положительным γ . В этом случае огибающая (3.9)

$$\tilde{\mathbf{E}}(t) = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) + \mathbf{E}_0^* \exp(i\omega^* t), \quad \omega = \omega_0 + i\gamma, \quad (3.35a)$$

где $\mathbf{E}_0$ не зависит от времени. Поскольку частота ω лежит на комплексной плоскости в верхней полуплоскости, то мы можем взять аналитическое продолжение для диэлектрической проницаемости $\varepsilon^{ik}(\omega)$ и написать

$$\partial_t D^i(t) = -i \left(\omega \varepsilon^{ik}(\omega) E_0^k e^{-i\omega t} - \omega^* \varepsilon^{*ik}(\omega) E_0^{*k} e^{i\omega^* t} \right),$$

Согласно выражению для дивергенции вектора Умова-Пойнтинга (3.34b), работа A , затраченная внешними источниками к моменту времени $t = 0$ и усреднённая по периоду колебаний с частотой ω_0 , равна

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4\pi} \left\langle \int_{-\infty}^0 dt (\mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D}) \right\rangle = \\ &= -i \int_{-\infty}^0 \frac{e^{2\gamma t}}{4\pi} E_0^{*k} E_0^i \left(\omega \varepsilon^{ki}(\omega) - \omega^* \varepsilon^{*ik}(\omega) \right). \end{aligned} \quad (3.35b)$$

Теперь произведём разложение в ряд Лорана полученного выражения по малому γ до нулевой степени:

$$A = \frac{1}{4\pi\gamma} E_0^{*k} E_0^i \omega_0 \varepsilon_a^{ki}(\omega_0) + \frac{1}{4\pi} E_0^{*k} E_0^i \frac{d(\omega \varepsilon_h^{ki})}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0}. \quad (3.35c)$$

Первое слагаемое соответствует диссипативным потерям (3.34e) и определяют часть затраченной работы, перешедшей в тепло. Остальная часть работы оказалась запасённой в колебаниях электромагнитного поля.

Говорить о запасённой энергии электромагнитных колебаний как о самостоятельной физической величине имеет смысл только тогда, когда величина γ может быть выбрана такой, чтобы в (3.35c) первое диссипативное слагаемое было мало по сравнению со вторым. Иными словами, анти-эрмитова часть тензора диэлектрической проницаемости должна быть мала по сравнению с эрмитовой, $\hat{\varepsilon}_a \ll \hat{\varepsilon}_h$

Для магнитной части запасённой энергии рассуждения будут совершенно аналогичными. Поменяем теперь обозначения, заменив в (3.35c) $E_0 \rightarrow H_\omega$, и напишем окончательное выражение для энергии электромагнитных колебаний волны:

$$E = \frac{1}{8\pi} \int (d\omega) \left(\frac{\partial(\omega \varepsilon_h^{ki})}{\partial\omega} E_\omega^{*k} E_\omega^i + \frac{\partial(\omega \mu_h^{ki})}{\partial\omega} H_\omega^{*k} H_\omega^i \right). \quad (3.35d)$$

Выражение (3.35d) называется *формулой Бриллюэна* (*Brillouin energy density*). Если среда изотропна, то вы-

ражения для плотности запасённой энергии упрощается до

$$E = \frac{1}{8\pi} \int (d\omega) \left(\frac{\partial(\omega \varepsilon')}{\partial\omega} |\mathbf{E}_\omega|^2 + \frac{\partial(\omega \mu')}{\partial\omega} |\mathbf{H}_\omega|^2 \right). \quad (3.35e)$$

3-7.4 Задачи

• **Задача 1:** Показать, что в прозрачной диспергирующей среде для плоской монохроматической волны выполняется соотношение

$$v_g \bar{E} = \bar{S}, \quad (3.36)$$

где v_g — групповая скорость, $\bar{E}$ — средняя по времени плотность запасённой электромагнитной энергии, $\bar{S}$ — среднее по времени абсолютное значение вектора Умова-Пойнтинга.

• **Задача 2:** Показать, что в почти прозрачной диспергирующей среде для плоской монохроматической волны выполняется соотношение

$$\frac{\bar{S}}{\bar{Q}} = \frac{\lambda_0}{4\pi k}, \quad (3.37)$$

где $k = \text{Im} \sqrt{\varepsilon \mu}$ — показатель поглощения среды (3.3b), λ_0 — длина волны в вакууме, а $\bar{Q}$ — средняя по времени объёмная плотность потерь волны, уходящих в тепло.

Глава 4

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§4-1. Отражение и преломление волн на плоской поверхности раздела

Пусть плоская монохроматическая волна, имеющая частоту ω , падает из изотропной среды ‘i’, характеризующейся ε_i, μ_i , на плоскую границу раздела с изотропной средой ‘t’, характеризующейся константами ε_t, μ_t . Наша задача здесь — описать поведение волны после взаимодействия с границей раздела.

Введём комплексные показатели преломления и импедансы сред согласно определениям (3.3b, 3.3f)

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad \zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}. \quad (4.1)$$

Для того, чтобы постановка задачи имела смысл, среда ‘i’ должна быть прозрачной, $\text{Im } n_i = 0$. Угол падения (угол между нормалью и направлением распространения приходящей к границе волны) обозначим θ_i . В результате преломления на границе раздела падающая волна разделится на две волны — отражённую и прошедшую, см. Рисунок 4.1. Отражённая волна будет распространяться в среде ‘i’ от границы раздела под тем же углом θ_i , что мы увидим ниже. Прошедшая волна распространяется под некоторым углом θ_t в материале ‘t’ от границы раздела (θ_t имеет такую геометрическую интерпретацию только если он действителен; в общем случае он является существенно комплексной величиной, таким образом, не имея простой геометрической интерпретации).

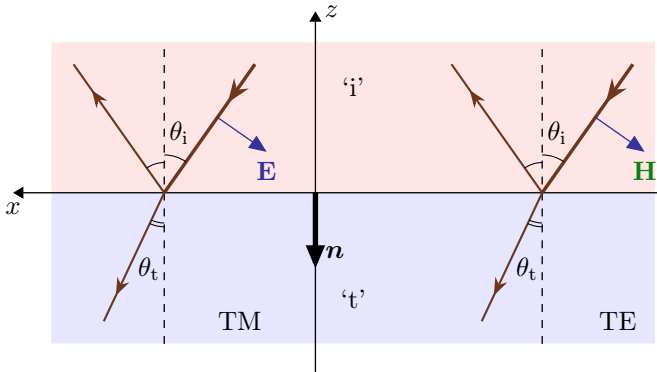


Рис. 4.1 Отражение и преломление TE (*out-of-plane polarization* or *s-polarization*, from the German ‘senkrecht’) и TM (*in-plane polarization* or *p-polarization*, from the German ‘parallel’) волн на границе раздела.

Введём декартову систему координат $Oxyz$, в которой ось Oz направлена по нормали (из среды ‘t’ в среду

‘i’), а граница раздела совпадает с плоскостью Oxy . Мы будем полагать, что волновой вектор падающей волны лежит в плоскости Oxz . Тогда из симметрии задачи следует, что в этой же плоскости лежат волновые вектора отражённой и прошедшей волн.

4-1.1 Закон Снелла; полное внутренне отражение

Пусть $\mathbf{k}_i$ — волновой вектор падающей волны, $\mathbf{k}_r$ — волновой вектор отражённой волны, а $\mathbf{k}_t$ — волновой вектор прошедшей волны. Абсолютные значения волновых векторов в среде ‘i’, откуда приходит падающая волна, и квадрат волнового вектора в среде ‘t’ суть

$$k_i = k_r = n_i \frac{\omega}{c}, \quad k_t^2 = n_t^2 \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (4.2a)$$

где ω — частота волны. Периодичность $\propto \exp(ik_i x \sin \theta_i)$ поля вдоль оси Ox накладывается падающей волной, то есть x -компонента всех волновых векторов равна $k_i \sin \theta_i$. Отсюда следует, что для отражённой волны $k_r^z = k_i \cos \theta_i$, поскольку она распространяется от границы раздела. Компоненты волнового вектора прошедшей волны равны

$$k_t^x = k_i \sin \theta_i, \quad k_t^z = \sqrt{k_t^2 - k_i^2 \sin^2 \theta_i}. \quad (4.2b)$$

Должна быть выбрана та ветвь корня для k_t^z , которая имеет неотрицательную мнимую часть, с тем, чтобы прошедшая волна не возрастала по амплитуде при удалении от границы раздела. Определим, пока что формально, угол, под которым распространяется прошедшая волна согласно равенству

$$\cos \theta_t = \frac{k_t^z}{n_t(\omega/c)} = \sqrt{1 - (n_i/n_t)^2 \sin^2 \theta_i}. \quad (4.2c)$$

Правая часть в (4.2c) в общем случае является комплексной величиной. Как и раньше, следует выбирать корень, имеющий положительную мнимую часть.

4-1.1.1 Падение на прозрачную среду

В частности, если среда ‘t’ прозрачная, и $k_t^z > 0$, то это означает, что прошедшая волна является распространя-

ющейся волной. Если в (4.2b) k_t^z является действительной величиной, то есть

$$|n_t| > |n_i \sin \theta_i|, \quad (4.2d)$$

то прошедшая волна является распространяющейся волной под углом θ_t , см. Рисунок 4.1. Тогда $k_t^x = k_t \sin \theta_t$, и из (4.2a, 4.2b) следует закон Снелла

$$\sin \theta_t = \frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i. \quad (4.2e)$$

Полное внутреннее отражение. Когда показатель преломления нижней среды меньше, чем у верхней, $n_t < n_i$, то решение для угла θ_t остаётся действительным не при всех углах падения n_i . Если угол падения достаточно велик,

$$|\theta_i| > \theta_c, \quad \sin \theta_c = \frac{n_t}{n_i}, \quad (4.2f)$$

то условие (4.2d) нарушается, то есть z -компонента k_t^z волнового вектора прошедшей волны становится мнимой согласно (4.2b). Это означает, что прошедшая волна не распространяется от границы, а коэффициент отражения равен единице в силу закона сохранения энергии. Об этом феномене говорят как о *полном внутреннем отражении* (*total internal reflection*).

4-1.2 Граничные формулы Френеля

Определим теперь амплитуды отражённой и прошедшей волн. Из симметрии задачи следует, что независимыми поляризациями надо выбрать ТЕ-поляризацию, в которой электрическое поле имеет только y -компоненту, а магнитное поле лежит в Oxz плоскости, и ТМ-поляризацию, в которой, наоборот, магнитное поле имеет только y -компоненту, а электрическое поле лежит в Oxz плоскости.

Примем, что амплитуда падающей волны равна единице. Распределение электромагнитного поля в двух возможных поляризациях, ТЕ- и ТМ-волнах, полностью определяется y -компонентами полей.

$$\text{ТЕ: } E_y = e^{ik_i \sin \theta_i x} (e^{-ik_i \cos \theta_i z} + r_E e^{ik_i \cos \theta_i z}),$$

$$\text{ТМ: } H_y = e^{ik_i \sin \theta_i x} (e^{-ik_i \cos \theta_i z} - r_M e^{ik_i \cos \theta_i z}), \quad (4.3a)$$

при $z > 0$, и

$$\text{ТЕ: } E_y = e^{ik_i \sin \theta_i x} \cdot t_E \cdot e^{-ik_t^z z},$$

$$\text{ТМ: } H_y = e^{ik_i \sin \theta_i x} \cdot t_M \cdot e^{-ik_t^z z}$$

при $z < 0$. Комплексные амплитуды $r_{E,M}$ и $t_{E,M}$ называются амплитудами отражения и прохождения. Граничными условиями на поверхности является непрерывность компонент

$$E^y, \quad H^x = \frac{ic}{\omega} \frac{\partial_z E^y}{\mu}, \quad H^y, \quad E^x = -\frac{ic}{\omega} \frac{\partial_z H^y}{\varepsilon}. \quad (4.3b)$$

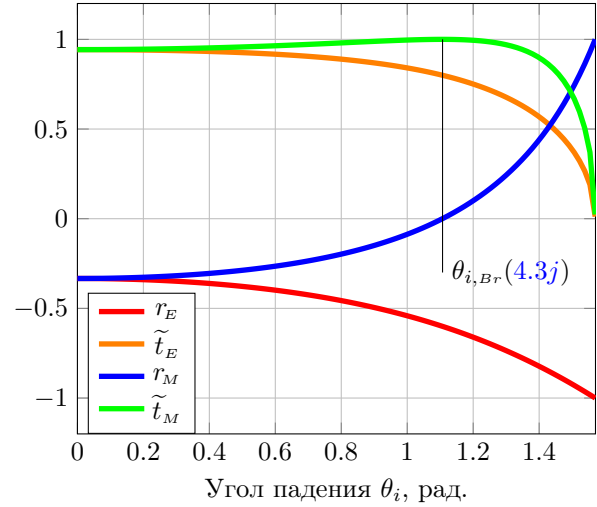


Рис. 4.2 Амплитуды отражения (4.3g) и прохождения (4.3k) для немагнитных сред при падении из оптически менее плотной среды в более плотную, $n_t/n_i = \zeta_i/\zeta_t = 2$.

Прежде чем продвинуться дальше положим, что величина θ_t , имеющая действительную часть в диапазоне $[-\pi/2, \pi/2]$, является решением уравнений (4.2c, 4.2e) (при указанном ограничении на действительную часть решение единственно). Отметим, что если θ_t оказывается существенно комплексной величиной, то оно не имеет простого геометрического смысла. Уравнения на амплитуды отражения получаются путём исключения амплитуды прохождения из условий непрерывности касательных компонент полей:

$$\text{ТЕ: } \frac{1 - r_E}{1 + r_E} = \frac{\mu_i k_t^z}{\mu_t k_i^z} = \frac{\zeta_i \cos \theta_t}{\zeta_t \cos \theta_i}, \quad (4.3c)$$

$$\text{ТМ: } \frac{1 + r_M}{1 - r_M} = \frac{\varepsilon_i k_t^z}{\varepsilon_t k_i \cos \theta_i} = \frac{\zeta_t \cos \theta_t}{\zeta_i \cos \theta_i}. \quad (4.3d)$$

Амплитуды прохождения связаны с амплитудами отражения условием непрерывности y -компонент полей:

$$\text{ТЕ: } t_E = 1 + r_E, \quad \text{ТМ: } t_M = 1 - r_M. \quad (4.3e)$$

Для частного случая нормального падения, $\theta_i = 0$ (тогда и $\theta_t = 0$) физические свойства преломления ТЕ- и ТМ-поляризаций совпадают. Действительно, в этом случае коэффициенты отражения r в (4.3c, 4.3d) совпадают,

$$r_{E,M}|_{\theta_i=0} = \frac{\zeta_t/\zeta_i - 1}{\zeta_t/\zeta_i + 1}, \quad (4.3f)$$

что оправдывает выбор знака в (4.3a).

Решая теперь уравнения (4.3c, 4.3d, 4.3e) для любого угла падения, находим, что для ТЕ-волны амплитуды прохождения и отражения равны

$$r_E = \frac{\zeta_t \cos \theta_i - \zeta_i \cos \theta_t}{\zeta_t \cos \theta_i + \zeta_i \cos \theta_t}, \quad t_E = \frac{2\zeta_t \cos \theta_i}{\zeta_t \cos \theta_i + \zeta_i \cos \theta_t}. \quad (4.3g)$$

Для ТМ-волны эти амплитуды равны

$$r_M = \frac{\zeta_t \cos \theta_t - \zeta_i \cos \theta_i}{\zeta_t \cos \theta_t + \zeta_i \cos \theta_i}, \quad t_M = \frac{2\zeta_i \cos \theta_i}{\zeta_t \cos \theta_t + \zeta_i \cos \theta_i}. \quad (4.3h)$$

Амплитуды ТМ-волн (4.3h) могут быть получены из выражений для амплитуд ТЕ-волн (4.3g) путём формальных замен $\zeta \rightarrow 1/\zeta$ и $r \rightarrow -r$, которые следуют из общей симметрии уравнений Максвелла в среде относительно перестановок $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$, $\varepsilon \leftrightarrow \mu$ и с учётом противоположности знаков в определениях амплитуд рассеяния (4.3a).

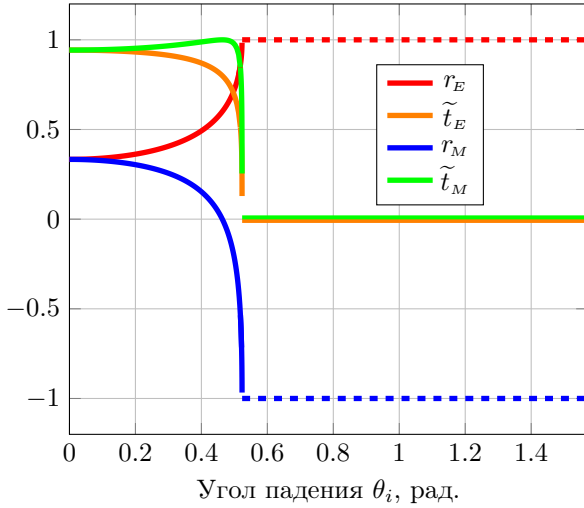


Рис. 4.3 Амплитуды отражения (4.3g) и прохождения (4.3k) для немагнитных сред при падении из оптически более плотной среды в менее плотную, $n_t/n_i = \zeta_i/\zeta_t = 1/2$. При угле падения, превышающем угол полного отражения (4.2f), $\theta > \theta_c$, коэффициенты прохождения равны нулю, а коэффициенты отражения становятся комплексными и по модулю равными единице.

По определению, коэффициентом отражения называется доля потока энергии падающей волны, уходящая в отражённой волне от поверхности:

$$R = |r|^2 \leq 1. \quad (4.3i)$$

4-1.2.1 Падение на прозрачную среду

Положим, что нижняя среда ‘t’ является прозрачной.

Нормальное падение. Амплитуда прохождения (4.3f) поменяет знак с сохранением абсолютного значения, если волна распространяется в обратном направлении, падая из среды ‘t’ на среду ‘i’.

Полное преломление. Пусть обе среды являются немагнитными. Тогда импедансы сред суть обратные показатели преломления, $\zeta = 1/n$. Для ТМ-поляризации существует угол падения $\theta_i = \theta_{i,Br}$, называемый *углом Брюстера* (*Brewster’s angle or the polarization angle*), при котором отражение отсутствует, $r_M = 0$. Угол падения $\theta_{i,Br}$ и соответствующий ему угол прохождения $\theta_{t,Br}$ определяются равенствами

$$\operatorname{tg} \theta_{i,Br} = \frac{n_t}{n_i}, \quad \theta_{t,Br} = \frac{\pi}{2} - \theta_{i,Br}. \quad (4.3j)$$

Сам феномен отсутствия отражённой волны называют *полным преломлением*.

Для ТЕ-поляризации аналогичного эффекта нет в случае немагнитных сред. Если же среды магнитные, то при определённых условиях на диэлектрические проницаемости и магнитные восприимчивости можно добиться обращения в ноль коэффициента отражения r_E для ТЕ-волны.

Коэффициент прохождения. По определению, коэффициентом прохождения T называется доля нормальной компоненты потока энергии падающей волны, переносимая от поверхности прошедшей волной. Если для коэффициента отражения R установить его связь с амплитудами отражения $r_{E,M}$ было просто (4.3i), поскольку и среда и абсолютное значение угла между волновым вектором и нормалью были теми же, что и для падающей волны, то для прошедшей волны для установления аналогичной связи требуется пересчёт. Введём амплитуды прохождения, нормированные на нормальную компоненту плотности потока энергии $c[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n}/4\pi$ в падающей волне

$$\tilde{t}_E = \sqrt{\frac{\zeta_i \operatorname{Re}(\cos \theta_t)}{\zeta_t \cos \theta_i}} t_E, \quad \tilde{t}_M = \sqrt{\frac{\zeta_t \operatorname{Re}(\cos \theta_t)}{\zeta_i \cos \theta_i}} t_M. \quad (4.3k)$$

Коэффициенты $\tilde{t}$ обращаются в ноль, если происходит полное внутреннее отражение. Выражение для коэффициента прохождения становится простым,

$$T = |\tilde{t}|^2 = 1 - R. \quad (4.3l)$$

Последнее равенство выражает собой закон сохранения энергии. Отметим, что даже если верхняя среда менее плотная, чем нижняя, т.е. внутреннего отражения нет, то коэффициент прохождения стремится к нулю при скользких углах падения, см. Рис. 4.2.

§4-2. Падение волны на непрозрачную среду

В § 4-1 были получены общие формулы, описывающие отражение и преломление света при падении из прозрачной изотропной среды на границу раздела с некоторой другой изотропной средой. Однако формулы Френеля (4.3g, 4.3h) легко интерпретируются для случая, когда вторая среда также является прозрачной.

Здесь мы отдельно рассмотрим падение электромагнитной волны из вакуума или изотропной прозрачной среды 'i' на поверхность непрозрачной среды 't' с большим по модулю комплексным показателем преломления, $|n_t| \gg 1$. Обычно под такими средами имеются ввиду металлы, для которых в то же время мал импеданс $|\zeta_t|$. В пределе $|n_t| \gg 1$ глубина проникновения поля в среду 't' равна по порядку величины λ_0/n_t , где λ_0 — длина волны в вакууме. Это намного меньше, чем длина волны λ_0/n_i в верхней прозрачной среде. Поэтому для описания электромагнитного поля в среде 'i' нам не нужно знать полное распределение поля внутри среды 't', а достаточно только знания свойств её поверхностного отклика на электромагнитное поле. Этот отклик характеризуется поверхностным импедансом ζ , (совпадающим с ζ_t , если отклик в среде 't' можно считать локальным в пространстве). Действительно, из величины $|n_t|$ следует, согласно общим соотношениям на волновой вектор прошедшей волны (4.2a, 4.2b), что он направлен практически вертикально для всех углов падения. Это означает, что касательные компоненты магнитного и электрического полей на поверхности раздела однозначно связаны между собой соотношением типа (3.19b) через поверхностный импеданс. В этом, собственно, и состоит концепция поверхностного импеданса, хотя формально она применима при любом соотношении длин волн в материалах.

Для того, чтобы была применима концепция поверхностного импеданса, граница раздела должна быть плоской только на масштабах, сравнимых с глубиной проникновения поля λ_0/n_t . При этом на масштабе длины волны λ_0/n_i в верхней прозрачной среде 'i' граница может быть вовсе не плоской. В этом состоит практическая ценность концепции поверхностного импеданса.

Ниже для простоты изложения мы будем полагать, что верхней средой 'i' является вакуум, так что там поля и их индукции совпадают, $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{H}$.

4-2.1 Граничные условия в форме Леонтовича: общая форма

Граничные условия в форме Леонтовича выглядят следующим образом:

$$\mathbf{E}^\alpha(t, \mathbf{r}^\perp) = \int_{-\infty}^t dt' \int d^2 r'^\perp K^{\alpha\beta}(t-t', \mathbf{r} - \mathbf{r}'^\perp) \mathbf{H}^\beta(t', \mathbf{r}'^\perp) \quad (4.4a)$$

над поверхностью материала, т.е. при $z = +0$, где индексы $\{\alpha, \beta\} = \{x, y\}$. Ядро $\hat{K}$ имеет в общем случае как временную, так и пространственную дисперсию. Граничными условиями (4.4a) полностью задаются отражательные свойства поверхности материала.

Покажем, что запись граничных условий в виде (4.4a) действительно возможна. Для этого проинтегрируем уравнение Максвелла 'в пустоте'

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}/c \quad (4.4b)$$

на интервале $(-\infty, +0)$ по нормальной координате z , учитывая, что при $z \rightarrow -\infty$ все поля исчезают. Получим:

$$\mathbf{E}^\alpha(t) = -\frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{c} \int_{-\infty}^{+0} dz \partial_t B^\beta(t, z) + \partial_\alpha \int_{-\infty}^{+0} dz E^z(t, z), \quad (4.4c)$$

где единичный антисимметричный тензор второго ранга задаётся условиями $\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}$ и $\epsilon^{xy} = 1$. В равенстве (4.4c) стоят поля, взятые ниже точки $z = +0$, при $z \leq 0$. Поскольку источник электромагнитных волн у нас предполагается находящимся сверху, при $z > 0$, то величины в области $z < 0$ причинно зависят от величин в точке $z = +0$; всё же поле задаётся двумя скалярными величинами, в качестве которых могут быть выбраны в т.ч. две касательные компоненты магнитного поля $\mathbf{B}^\alpha$. Не смотря на то, что при $z = +0$ есть вклад волн, отражённых поверхностью, и потому причинно зависящих от величин при $z < 0$, можно показать, что учёт (хотя бы бесконечно слабого) затухания в отражающем материале окончательно доказывает правомочность формулы (4.4a), см. Пункт 4-2.1.1.

Если мы теперь проинтегрируем уравнение Максвелла (1.9a)

$$\text{rot } \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E}/c + 4\pi \mathbf{j}/c \quad (4.4d)$$

на том же интервале $(-\infty, +0)$, то получим уравнение, эквивалентное уравнению (4.4c):

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^\alpha(t) = & \partial_\alpha \int_{-\infty}^{+0} dz B^z(t, z) + \\ & + \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{c} \int_{-\infty}^{+0} dz \left(\partial_t E^\beta(t, z) + 4\pi j^\beta(t, z) \right). \end{aligned} \quad (4.4e)$$

Таким образом, граничные условия в форме Леонтовича (4.4a) могут быть переписаны и в обратном виде, когда касательные компоненты магнитного поля считаются откликом на касательные компоненты электрического поля.

4-2.1.1 Проверка выполнения принципа причинности

Рассмотрим скалярное поле $A(t, z) = A_+(t, z) + A_-(t, z)$, где $\pm$ соответствует волнам, распространяющимся соответственно в сторону больших и меньших z ; $z = 0$ мы по-прежнему считаем границей раздела, область $z < 0$ заполнена однородной средой. Источник находится при некотором большом $z = L$, поэтому волна от источника, которая распространяется к ней в сторону меньших z , доходит до границы и частично отражается, после чего распространяется в обратном направлении. Поэтому для величин вблизи поверхности мы можем написать

$$A_+(t, +0) = \int_0^\infty d\tau K(\tau) A_-(t, +0),$$

Перепишем то же самое в частотном представлении, также при $z = +0$

$$A_{+, \omega} = K_\omega A_{-, \omega}. \quad (4.4f)$$

Величина K_ω есть коэффициент отражения на частоте ω . Для дальнейшего важно заметить, что помимо отсутствия полюсов у K_ω в верхней части комплексной плоскости ω , в этой области K_ω также удовлетворяет условию

$$|K_\omega| < 1, \quad \text{Im } \omega > 0. \quad (4.4g)$$

Действительно, ситуация $\text{Im } \omega > 0$ соответствует экспоненциально растущей во времени волне, и по принципу причинности амплитуда отражённой волны не может быть больше амплитуды падающей. Учёт потерь при отражении, которые, вообще говоря, всегда присутствуют в веществе, делает неравенство строгим.

Равенство (4.4f) можно переписать в виде

$$A_{+, \omega} = \tilde{K}_\omega A_\omega, \quad \tilde{K}_\omega = \frac{K_\omega}{1 + K_\omega}, \quad (4.4h)$$

причём в силу неравенства (4.4g) у комплексной функции $\tilde{K}_\omega$ в верхней полуплоскости также нет полюсов. Равенство (4.4h), в котором ядро $\tilde{K}$ удовлетворяет принципу причинности, показывает принципиальную возможность постановки граничных условий при отражении волны от поверхности в форме (4.4a), в которой ядро наследует принцип причинности.

4-2.2 Граничные условия Леонтовича в случае скин-эффекта

В случае, когда поля проникают в материал на малую глубину δ , много меньшую длины λ падающей волны, $\delta \ll \lambda$, связь между касательными компонентами электрического и магнитного полей на поверхности материала можно считать локальной в пространстве, так что

$$E^\alpha(t) = \int_{-\infty}^t dt' \zeta^{\alpha\beta}(t - t') H^\beta(t'), \quad (4.5a)$$

где $\hat{\zeta}$ называется поверхностным импедансом. Если же материал изотропен в плоскости границы раздела, то связь упрощается до вида

$$\mathbf{E}_t = \int_{-\infty}^t dt' \zeta(t - t') [\mathbf{H}_t(t') \times \mathbf{n}], \quad \mathbf{E}_{t, \omega} = \zeta_\omega [\mathbf{H}_{t, \omega} \times \mathbf{n}], \quad (4.5b)$$

где индекс 't' означает проекцию на поверхность материала, а $\mathbf{n}$ — нормаль к его поверхности, направленная внутрь непрозрачного материала. Отметим, что определение поверхностного импеданса ζ (4.5b) совпадает с определением волнового импеданса изотропной среды (3.3e) для плоских волн, если они распространяются по нормали к поверхности — что так и есть в силу неравенства $\delta \ll \lambda$.

Из неравенства $\delta \ll \lambda$ можно сделать заключение, что либо диэлектрическая проницаемость материала, либо его магнитная восприимчивость, либо они обе велики по сравнению с единицей. Это означает, что в записанном в интегральном виде уравнении Максвелла (4.4e) производная электрического поля $\partial_t \mathbf{E}/c$ оказывается малой по сравнению с электрическим током $\mathbf{j}$. Кроме того, мала нормальная компонента $\mathbf{B}^z$. Поэтому в правой части (4.4e) мы можем удержать только последнее слагаемое с током, получив

$$\mathbf{B}_t = -\frac{4\pi}{c} \int_{-\infty}^{+0} dz [\mathbf{j}(z) \times \mathbf{n}] \equiv -\frac{4\pi}{c} [\mathbf{J}_t \times \mathbf{n}]. \quad (4.5c)$$

Взаимозависимость (4.5b) электрического и магнитного полей посредством импеданса позволяет теперь связать поверхностный ток $\mathbf{J}_t$ с касательным электрическим полем $\mathbf{E}_t$ (напоминаем, что над поверхностью материала, при $z = +0$, предполагается вакуум, и потому индукция магнитного поля равна самому полю, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$):

$$\hat{\zeta}^{-1} \mathbf{E}_t = [\mathbf{H}_t \times \mathbf{n}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_t. \quad (4.5d)$$

Таким образом, ζ есть (с точностью до множителя $4\pi/c$) коэффициент пропорциональности между поверхностным током и касательной компонентой электрического поля (т.е., удельным падением напряжения на единицу длины), что и оправдывает именование ζ поверхностным импедансом.

Посчитаем мощность Q , которая поглощается единицей поверхности в единицу времени. Эта мощность равна нормальной компоненте потока энергии на поверхности. Её мгновенное значение (3.33a) есть

$$Q = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t]). \quad (4.5e)$$

Если волна является (почти) монохроматической, имеющей частоту ω , так что её можно представить в виде

(3.9), то средняя по периоду волновых колебаний выделяющаяся мощность записывается в виде

$$Q = \frac{c}{2\pi} \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_t|^2}{\zeta'_\omega} = \frac{c}{2\pi} \zeta'_\omega |\tilde{\mathbf{H}}_t|^2. \quad (4.5f)$$

Определим *поверхностное сопротивление* (*surface resistance*)

$$R_s = \frac{4\pi\zeta'}{c} : \quad \mathbf{E}_t = R_s \mathbf{J}_t. \quad (4.5g)$$

согласно (4.5d), что оправдывает общее определение волнового импеданса среды (3.3g). В системе СИ поток мощности (4.5f) переписывается в виде

$$\text{SI:} \quad Q = 2R_s |\tilde{\mathbf{H}}_t|^2, \quad [R_s]_{\text{SI}} = \frac{4\pi c_{\text{SI}}}{10^7} \zeta'_{\text{SGS}}, \quad (4.5h)$$

где поверхностное сопротивление R_s измеряется в Ом. Отметим, что соотношения электродинамики, записанные в СИ, подробно расписаны, например, в [Pozar, 2012].

4-2.2.1 Отражение плоской волны

Применим теперь установленные общие формулы к отражению плоской волны, имеющей частоту ω , и падающей под углом θ , смотри Рисунок 4.1.

Поскольку определения поверхностного импеданса ζ (4.5b) и волнового импеданса (3.3e) совпадают, граничные условия (4.3b) приводят к тем же соотношениям Френеля (4.3g, 4.3h) для амплитуд отражения, в которых следует положить

$$\cos \theta_t = 1, \quad \text{and} \quad \zeta_t = \zeta, \quad \zeta_i = 1, \quad (4.5i)$$

так что

$$r_E = \frac{\zeta \cos \theta - 1}{\zeta \cos \theta + 1}, \quad r_M = \frac{\zeta - \cos \theta}{\zeta + \cos \theta}. \quad (4.5j)$$

В результате коэффициенты отражения для TE - и TM -поляризаций оказываются равными

$$R_{TE} = 1 - \frac{4\zeta' \cos \theta}{(\zeta' \cos \theta + 1)^2 + (\zeta'')^2 \cos^2 \theta}, \quad (4.5k)$$

$$R_{TM} = 1 - \frac{4\zeta' \cos \theta}{(\cos \theta + \zeta')^2 + (\zeta'')^2}. \quad (4.5l)$$

Подчеркнём, что выражения (4.5j) для комплексных амплитуд отражения могут быть получены и непосредственно из выражений (4.3a) для поля в прозрачной среде и граничных условий Леонтовича (4.5b). Поэтому выражения (4.5j) применимы и в случае, когда отклик в непрозрачной среде на электромагнитное поле не является локальным в пространстве.

В пределе малого поверхностного импеданса $|\zeta| \ll 1$ коэффициент отражения TE -поляризации (4.5k) становится равным

$$R_{TE} = 1 - 4\zeta' \cos \theta. \quad (4.5m)$$

При не слишком скользком угле падения коэффициент отражения TM -поляризации (4.5l)

$$R_{TM} = 1 - \frac{4\zeta'}{\cos \theta}, \quad \frac{\pi}{2} - \theta \gg |\zeta|. \quad (4.5n)$$

Таким образом, при увеличении угла падения коэффициент отражения R_{TM} падает. Он достигает минимума

$$R_{TM, \min} = \frac{|\zeta| - \zeta'}{|\zeta| + \zeta'} \quad (4.5o)$$

при почти параллельном границе распространения падающей волны, когда $\theta_{\min} = \pi/2 - |\zeta|$.

4-2.2.2 Идеальный металл

Пределу идеального металла соответствует нулевой поверхностный импеданс, $\zeta = 0$. Граничными условиями для поля на поверхности идеального металла является, во-первых, равенство нулю касательной компоненты электрического поля, $\mathbf{E}_t = 0$, см. (4.5d). Из этого равенства и из уравнения Максвелла на нормальную компоненту магнитной индукции следует, что она также равна нулю, $B^n = 0$. Кроме того, из уравнения Максвелла на касательную компоненту электрической индукции следует, что производная по нормали от касательной компоненты магнитного поля равна нулю, $\partial_n \mathbf{B}_t = 0$. Собирая всё вместе, получаем:

$$\Gamma : \quad \mathbf{E}_t = 0, \quad B^n = 0, \quad \partial_n \mathbf{B}_t = 0. \quad (4.5p)$$

4-2.3 Поверхностный импеданс металлов

Металлы характеризуются большой по амплитуде диэлектрической проницаемостью, имеющей чаще всего большую по амплитуде мнимую часть, или, реже, большую отрицательную действительную часть. В результате комплексный коэффициент преломления (3.3b)

$$n + ik = \frac{ck}{\omega} = \sqrt{\varepsilon\mu} \gg 1 \quad (4.6a)$$

имеет большую положительную мнимую часть, $k \gg 1$. Это означает, что волны в металле не распространяются. Глубина, на котором поле существенно затухает,

$$\delta = \frac{c}{k\omega} \ll \frac{c}{\omega} \quad (4.6b)$$

мала по сравнению с характерным масштабом c/ω модуляции поля в падающей и отражённой волнах. Таким образом, реализуются общие предположения, приведшие к связи (4.5b) для касательных компонент полей $\mathbf{E}_t$, $\mathbf{H}_t$ над поверхностью металла. Эти поля непрерывны на поверхности, а в прошедшей в металл волне, которая является плоской и распространяющейся по нормали от поверхности, эти компоненты имеют связь (3.3e):

$$\mathbf{E}_t = \frac{1}{\zeta} [\mathbf{H}_t \times \mathbf{n}], \quad (4.6c)$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности, смотрящая в металл. Таким образом, поверхностный импеданс согласно определению (4.5b) есть

$$\zeta = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (4.6d)$$

Знак корня должен быть выбран таким образом, чтобы обеспечить положительность действительной части ζ' , поскольку она определяет поток энергии внутрь металла (4.5f).

4-2.3.1 Поверхностный импеданс в низкочастотной области

На относительно низких частотах диэлектрическая проницаемость связана со статической проводимостью соотношением (3.13e). В этом случае магнитное поле в металле

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_t \exp(-(1-i)|z|/\delta), \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}, \quad (4.6e)$$

где $\mathbf{H}_t$ — интенсивность магнитного поля на поверхности металла, а глубина скин-слоя δ вследствие сделанных нами определений в два раза больше глубины проникновения δ_p (3.3c). Поверхностный импеданс можно представить как обратное от произведения проводимости на комплексную глубину проникновения (с множителем $c/4\pi$, следующим из определений), то есть как обратный кондактанс единицы поверхности

$$\zeta = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{1-i}{\sigma\delta} = (1-i)\sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}}. \quad (4.6f)$$

Из выражений (4.6f, 4.6e) следует, что с ростом магнитной восприимчивости поверхностный импеданс растёт, а глубина проникновения падает. По этой причине ферромагнетики нерационально использовать в качестве материала для проводов в электротехнике. Увеличение поверхностного импеданса у ферромагнетиков приводит к увеличению потерь в волноводах с ферромагнитным металлом в качестве металлических жил. Уменьшение глубины проникновения приводит к сокращению эффективного сечения провода, по которому передаётся переменный электрический ток.

4-2.4 Задачи

• **Задача 1:** Выразить поверхностный импеданс через диэлектрическую проницаемость ε и магнитную восприимчивость μ отражающего материала в случае нормального скин-эффекта. Связать между собой глубину скин-слоя δ , частоту волны ω и поверхностный импеданс ζ .

• **Задача 2:** Вычислить закон дисперсии поверхностного импеданса для почти идеального металла,

дисперсия проводимости которого соответствует модели Друде.

• **Задача 3:** Пользуясь непосредственно соотношением (4.5d), определите коэффициент отражения от поверхности металла для нормально падающей волны. Найдите мощность, уходящую в единицу поверхности металла, если амплитуда колебаний электрического поля в падающей волне равна E_0 .

• **Задача 4:** Определить коэффициент отражения от поверхности металла как функцию угла падения и поляризации, зная поверхностный импеданс металла.

• **Задача 5:** Определить площадь полезного сечения для проводов (цилиндрических прутков) диаметром $2a = 10$ см, сделанных из меди и из стали, по которым течёт переменный ток с частотой 50 Гц. Принять, что сопротивление меди равно $\sigma_{\text{Cu}} = 580$ ксим/см, магнитная восприимчивость $\mu_{\text{Cu}} = 1$, сопротивление стали $\sigma_{\text{Fe}} = 100$ ксим/см, магнитная восприимчивость стали $\mu_{\text{Fe}} = 1000$. *Указание:* Площадь полезного сечения S определим как

$$S = \frac{|I|}{I_0} \cdot \pi a^2, \quad (4.7a)$$

где I — комплексная амплитуда тока, протекающего по всему сечению провода, $I_0 = \pi a^2 \sigma |\partial_z V|$ — величина постоянного тока, который бы протекал, если бы падение напряжения на единицу длины $\partial_z V$ было постоянным во времени.

• **Задача 6:** Определите полную интенсивность теплового излучения, производимую поверхностью металла, характеризующуюся поверхностным импедансом $\zeta(\omega)$ (предполагается предел $|\zeta| \ll 1$). Сначала найдите спектральную плотность интенсивности уходящего излучения в малый телесный угол $d\omega$, $dI_\omega/d\omega$. Затем найдите нормальную к поверхности металла компоненту этого потока энергии и проинтегрируйте по всем направлениям и частотам. При вычислении интеграла по углам пренебрегите поправками, малыми по ζ . При вычислении интеграла по частотам подставьте явную зависимость поверхностного импеданса от частоты, выраженную через статическую проводимость металла σ . Металл немагнитный, температура T (измеряется в эрг) мала по сравнению с частотой, на которой нормальный скин-эффект переходит в аномальный, кроме того $T \ll \hbar\sigma$ и $T \ll \hbar/\tau$, где τ — время релаксации электронов.

Указание: Пусть R — коэффициент отражения, $dI_\omega^b/d\omega$ (размерность эрг/см²) — величина, соответствующая чётному излучению. Искомая величина есть $dI_\omega/d\omega = (1-R)dI_\omega^b/d\omega$, это соотношение называется законом Кирхгофа. Телесный угол $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, где θ — угол между нормалью к поверхности и направлением распространения волны. Обратите внимание, что решение этой задачи, изложенное в [Ландау и Лифшиц, 1982], содержит ошибку.

§4-3. Рассеяние электромагнитных волн на частицах

Теория рассеяния в скалярном случае (когда поле скалярно и потому волна не имеет различных поляризаций) подробно изложена в Ландау и Лифшиц [1989]. Нет смысла здесь повторять изложение общих вещей, верных и для частного случая рассеяния электромагнитных волн. С другой стороны, векторная структура уравнений Максвелла привносит дополнительные особенности в процесс рассеяния. Главным образом этим особенностям будет посвящено наше изложение.

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, рассеивающуюся на некотором центре рассеяния. Для определённости будем полагать, что падающая волна распространяется в вакууме. Перейдём к комплексным амплитудам, введя огибающую $\tilde{\mathbf{E}}$ поля $\mathbf{E}$, см. (3.9). В дальнейшем знак ‘ $\sim$ ’ для краткости мы будем опускать. В этом случае усреднённые по периоду колебаний значения потока и плотности энергии даны в Пункте 3-7. Падающее поле представим в виде $\mathbf{E}_{\text{ext}} = \mathbf{E}_{\text{ext},0} \exp(i\mathbf{k}_{\text{ext}}\mathbf{r})$. Тогда абсолютное значение плотности потока в падающей волне равно

$$J = \frac{c|\mathbf{E}_{\text{ext},0}|^2}{2\pi}. \quad (4.8)$$

Полное сечение рассеяния σ (*сечение взаимодействия, extinction cross section*) определяется как отношение суммы мощности I_s , рассеивающейся на центре рассеяния, и мощности I_a , поглощающейся им, к плотности потока энергии в падающей волне:

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_s, \quad \sigma_s = \frac{I_s}{J}, \quad \sigma_a = \frac{I_a}{J}. \quad (4.9)$$

Таким образом, мощность I есть мощность, отбираемая из падающей волны; σ_s называется *сечением рассеяния (scattering cross section)*, σ_a – *сечением поглощения (absorption cross section)*.

Рассмотрим сначала трёхмерный случай. Вдалеке от рассеивающего центра электромагнитное поле представляет из себя совокупность плоской и сферической расходящейся волн,

$$\frac{E^i}{|\mathbf{E}_{\text{ext},0}|} = \frac{E_{\text{ext}}^i + E_s^i}{|\mathbf{E}_{\text{ext},0}|} \rightarrow \rightarrow e^i \exp(i\mathbf{k}_{\text{ext}}\mathbf{r}) + \frac{f^{ij}e^j}{r} \exp(ikr), \quad e^i = \frac{E_{\text{ext},0}^i}{|\mathbf{E}_{\text{ext},0}|}, \quad (4.10)$$

где $|\mathbf{k}_{\text{ext}}| = k$, $\mathbf{e}$ — единичный, в общем случае комплексный вектор, направленный вдоль электрического поля, а f^{ij} — амплитуда рассеяния; среди 9-ти пространственных матричных элементов амплитуды рассеяния есть только 4 независимых, поскольку у электромагнитных волн есть только две поляризации. Рассеянная центром

рассеяния мощность I_s равна

$$I_s = \int d\Omega \frac{d\sigma_s}{d\Omega}, \quad d\sigma_s = r^2 (\mathbf{S}_s \cdot \mathbf{n}) d\Omega, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{c}{2\pi} \text{Re}[\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*],$$

где интегрирование производится по сфере радиуса r , единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Мы ввели *дифференциальное сечение рассеяния* $d\sigma_s$, которое есть отношение мощности рассеянной волны, уходящей от рассеивателя в телесный угол $d\Omega$, к плотности потока энергии падающей волны. Поглощаемая рассеивателем мощность равна

$$I_a = - \int r^2 d\Omega (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}), \quad \mathbf{S} = \frac{c}{2\pi} \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]. \quad (4.12)$$

4-3.1 Оптическая теорема

Оптическая теорема связывает амплитуду рассеяния вперёд с полным сечением рассеяния, что может быть использовано для упрощения вычисления сечения рассеяния.

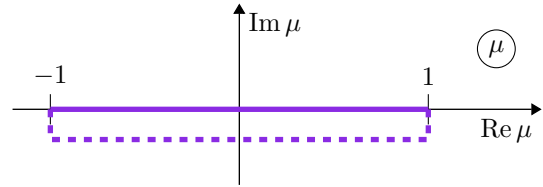


Рис. 4.4 Контур интегрирования по переменной $\mu = \cos \theta$. Сплошной линией обозначен исходный контур, пунктирной — изменённый.

Полный поток через поверхность большого радиуса r , нормированный на плотность падающего потока, по определению равен сечению поглощения, см. (4.12, 4.9). Преобразуем это выражение, используя разложение поля (4.10):

$$\sigma_a = -\sigma_s - \frac{c}{2\pi J} \text{Re} \int r^2 d\Omega ([\mathbf{E}_{\text{ext}}^* \times \mathbf{H}_s] + [\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_{\text{ext}}^*]) \cdot \mathbf{n},$$

где квадратичный вклад по полю падающей волны опущен, поскольку даёт нуль. Первое слагаемое в правой части соответствует излучению, производимому рассеивателем; второе слагаемое есть результат интерференции рассеянной волны с падающей. Теперь, используя равенства

$$\mathbf{H}_s = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s], \quad \mathbf{H}_{\text{ext}} = [\mathbf{n}_{\text{ext}} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}], \quad (4.13)$$

верные для плоских волн, см. (3.3e), где $\mathbf{n}_{\text{ext}} = \mathbf{k}_{\text{ext}}/k$,

получаем

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_s + \sigma_a = \\ &= -\operatorname{Re} \int r d\varphi f^{ij} \left(e^{*i} e^j (1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\text{ext}})) - (e^* \cdot \mathbf{n})(e \cdot \mathbf{n}) \right) \\ &\quad \exp(i(1 - (\mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{n}))kr).\end{aligned}\quad (4.14)$$

В процессе выкладок мы раскрыли двойное векторное произведение и использовали то, что $\mathbf{e} \perp \mathbf{n}_{\text{ext}}$.

Для того, чтобы взять интеграл по телесному углу в (4.14), перейдём к сферическим координатам $\{r, \theta, \varphi\}$, направив ось Oz по волновому вектору $\mathbf{k}_{\text{ext}}$ падающей волны, и введём переменную $\mu = \cos \theta$; тогда $(\mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{n}) = \mu$. Интеграл в правой части (4.14) имеет вид и при $r \rightarrow \infty$ оценивается как

$$r \int_{-1}^1 d\mu e^{ikr(\mu-1)} g(\mu) = \frac{1}{ik} (g(1) - g(-1) \exp^{-2ikr}), \quad (4.15)$$

где $g(\mu)$ – функция, независимая от r . Действительно, поскольку $g(\mu)$ предполагается аналитической функцией, не имеющей особенностей на отрезке $[-1, 1]$, то мы можем деформировать контур интегрирования так, как показано на Рис. 5.4. При этом, в силу величины r , вклад в интеграл будут давать только боковые участки контура; в пределе большого r длина вертикальных участков контура может быть сколь угодно малой, будучи пропорциональна $1/r$. Таким образом, приходим к правой части (4.15).

Вклад в (4.15), соответствующий отражению назад, т.е. когда $\mu = -1$, равен нулю, поскольку $g(-1) = 0$. Действительно, первое слагаемое в круглой скобке (4.14) равно нулю, поскольку $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\text{ext}}) = \mu$, а второе слагаемое равно нулю, поскольку $\mathbf{n} \perp \mathbf{E}_{\text{ext},0}$ при $\mu = \pm 1$. Для оставшегося вклада интегрирование по углу φ даёт множитель 2π , поскольку интеграл определяется окрестностью направления $\theta = 0$. Поэтому (4.14) с учётом выражения для плотности падающего потока (4.8) сводится к

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} (f^{ij}(0) e^{*i} e^j). \quad (4.16)$$

Равенство (4.16) составляет содержание *оптической теоремы*: полное сечение рассеяния определяется мнимой частью амплитуды рассеяния вперёд.

4-3.2 Оптическая теорема в двумерном случае

Пусть рассеивающее тело однородно вдоль некоторого направления, представляя собой цилиндр с некоторым сечением. Обозначим это направление Oy . Предположим, что падающая волна распространяется в направлении Oz , ортогональном направлению однородности тела. В этом случае исследование рассеяния волны следует отдельно проводить для TE -поляризации, когда электрическое поле имеет только y -компоненту, а магнитное поле лежит в ортогональной плоскости, и для TM -поляризации, когда, наоборот, ненулевую y -компоненту имеет только магнитное поле. Обозначим ненулевую y -компоненту электромагнитного поля Ψ .

Асимптотическое поведение поля на далёких расстояниях имеет вид

$$\Psi \rightarrow \exp(ikz) + \frac{f}{\sqrt{r}} \exp(ikr), \quad (4.17)$$

где Ψ есть y -компонента поля: для TE -волны $\Psi = E^y$, для TM -волны в $\Psi = H^y$. При выводе оптической теоремы можно пользоваться уже полученным равенством (4.14) заменой $r \rightarrow \sqrt{r}$, в котором интегрирование происходит только по одному углу θ в пределах $[-\pi, \pi]$, а u вектора поляризации $\mathbf{e}$ в случае TE -волны есть только y -компонента, т.е. ,в частности, $\mathbf{e}$ всегда ортогонален вектору $\mathbf{n}$. Для TM -поляризации удобно переписать (4.14) в эквивалентном виде в терминах единичного вектора $\mathbf{h} = \mathbf{H}_{\text{ext},0}/|\mathbf{H}_{\text{ext},0}|$, который направлен вдоль оси Oy . Поэтому для обеих поляризаций (4.14) сводится к

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_s + \sigma_a = \\ &= -\operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{r} d\theta f (1 + \cos \theta) \exp(i(1 - \cos \theta)kr).\end{aligned}\quad (4.18)$$

где $\cos \theta = (\mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{n})$. Интеграл (4.18) по-прежнему набирается вблизи $\theta = 0$, однако быстро осциллирующая экспонента имеет на этот раз вид

$$\int \sqrt{r} d\theta \exp\left(\frac{ikr\theta^2}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi i}}{\sqrt{k}}. \quad (4.19)$$

В результате приходим к тому, что аналогом (4.16) является

$$\sigma = \sqrt{\frac{8\pi}{k}} \operatorname{Im} \frac{f(0)}{\sqrt{i}}. \quad (4.20)$$

§4-4. Общие свойства рассеяния света на мелких частицах

Рассмотрим общие свойства рассеяния света частоты ω на частицах, размер a которых мал по сравнению с длиной волны света λ , так что $ka \ll 1$, где k – волновое число падающего света. В этом пределе основным механизмом взаимодействия частицы с электромагнитным полем является дипольное и магнито-дипольное взаимодействия. Мы полагаем, что окружающим пространством является вакуум. *Литература:* Ландау и Лифшиц [1982, §92].

Будем предполагать, что частицы сферически симметричны. Тогда электрическая и магнитная поляризуемости (дипольная восприимчивости) α_d и α_m частицы изотропны, так что вектор дипольного момента и поле налетающей волны сонаправлены,

$$\mathbf{d} = \alpha_d \mathbf{E}_{\text{ext}}, \quad \boldsymbol{\mu} = \alpha_m \mathbf{B}_{\text{ext}}, \quad (4.21a)$$

В рамках квази-статического приближения гамильтониан взаимодействия между полем и частицей равен

$$V = -(\mathbf{E}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{B}_{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\mu}). \quad (4.21b)$$

В терминах дипольной восприимчивости α оптическая теорема (4.16) для дипольным образом излучающего рассеивающего центра переписывается в виде

$$\sigma = 4\pi k \text{Im}(\alpha_d + \alpha_m). \quad (4.21c)$$

Отметим, что рассмотрение Ландау и Лифшиц [1982, §93] верно только в случае, когда сечение поглощения велико по сравнению с сечением рассеяния, $\sigma_a \gg \sigma_s$, в общем же случае верно соотношение (4.21c).

Зная дипольную восприимчивость, можно также отдельно вычислить сечение рассеяния, воспользовавшись выражением для интенсивности гармонически колеблющегося дипольного момента:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{2\pi}{c |\mathbf{E}_{\text{ext},0}|^2} \frac{4\omega^4 (|\mathbf{d}|^2 + |\boldsymbol{\mu}|^2)}{3c^3} = \\ &= \frac{8\pi \omega^4 (|\alpha_d|^2 + |\alpha_m|^2)}{3 c^4}. \end{aligned} \quad (4.21d)$$

4-4.1 Резонансное электро-дипольное рассеяние

Теперь рассмотрим более подробно случай, когда доминирующим является электро-дипольное рассеяние. Случай доминирующего магнито-дипольного излучения рассматривается аналогично.

Установим некоторые общие свойства рассеивания волн на резонансных частицах: будем интересоваться случаем, когда частота падающей волны близка к частоте ω_0 некоторого резонанса частицы, который может быть возбуждён электрическим полем падающей волны. Пока величина отстройки $\delta\omega = \omega - \omega_0$ не велика,

дипольная восприимчивость может быть представлена в виде

$$\alpha = Ba^3 - \frac{A\omega_0^2 a^3}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\gamma\omega}, \quad (4.21e)$$

где A, B – некоторые действительные безразмерные константы порядка или меньше единицы. Константа $\gamma > 0$ определяет ширину резонанса; для определённости мы предполагаем его хорошую добротность, так что $\gamma \ll \omega_0$. Структура знаменателя в (4.21e) выбрана таким образом, чтобы обеспечить принцип причинности и действительность величины $\alpha(\tau)$ во временном представлении, см. (7.9b, 7.1g) соответственно. Константа A должна быть положительной, $A > 0$, для того, чтобы обеспечить положительность мнимой части восприимчивости α . Величина B соответствует вкладу от всех прочих резонансов и может считаться константой, пока отстройка $\delta\omega$ мала по сравнению с расстоянием до другого ближайшего резонанса.

В ситуации общего положения константы A, B имеют одинаковый порядок, поэтому вблизи резонанса $\delta\omega = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$ первым слагаемым можно пренебречь, положив $B = 0$. Тогда дипольная восприимчивость может быть записана в более простом виде

$$\alpha = -\frac{(A/2)\omega_0}{\delta\omega + i\gamma} a^3. \quad (4.21f)$$

4-4.1.1 Сложение скоростей затухания

Второе слагаемое в правой части (4.21e) означает, что существует вклад в полный дипольный момент частицы, который удовлетворяет уравнению гармонических колебаний с затуханием

$$\partial_t^2 \mathbf{d} + \omega_0^2 \mathbf{d} + \gamma \partial_t \mathbf{d} = A\omega_0^2 a^3 \mathbf{E}_{\text{ext}} \quad (4.21g)$$

Из этого уравнения следует, что ширина резонанса есть то же самое, что скорость затухания свободных гармонических колебаний дипольного момента на резонансной частоте.

Существует по крайней мере два источника затухания амплитуды колебаний. Во-первых, энергия колебаний может излучаться путём дипольного излучения. Во-вторых, эта энергия может поглощаться внутри частицы, переходя в тепло. Поскольку эти два механизма диссипации являются независимыми, то скорости диссипации подчиняются закону сложения: полная скорость диссипации содержит два вклада,

$$\gamma = \gamma_{\text{loss}} + \gamma_{\text{rad}}.$$

Поглощение частицей энергии падающей волны соответствует части γ_{loss} и сечению поглощения σ_a ; величина этого поглощения определяется внутренними свойствами частицы. Переизлучение электромагнитной вол-

ны частицей не зависит от внутренних свойств частицы, оно даёт вклад γ_{rad} и соответствует сечению рассеяния σ_a .

4-4.1.2 Сечение рассеяния

Вычислим вклад γ_{rad} в ширину резонанса, вызываемого рассеянием света. Для этого предположим, что частота падающей монохроматической волны совпадает с частотой резонанса частицы, $\omega = \omega_0$, а внутренние потери в частице отсутствуют, $\gamma_{\text{loss}} = 0$. В этом случае дипольная восприимчивость $\alpha = iA\omega_0 a^3 / 2\gamma_{\text{rad}}$, а полное сечение и сечение рассеяния совпадают, $\sigma = \sigma_s$. Вычисляя полное сечение двумя способами — через излучение (4.21d) и через оптическую теорему (4.21c), — находим, что полное сечение σ_{max} , дипольная восприимчивость и ширина γ_{rad} резонанса равны:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{3\lambda^2}{2\pi}, \quad \alpha = \frac{3i}{2} \frac{1}{k^3}, \quad \gamma_{\text{rad}} = \frac{1}{3} A\omega_0 (ka)^3. \quad (4.21h)$$

В частности, мы видим, что сечение рассеяния определяется длиной волны, а не размером частицы, и потому оказывается значительно больше её геометрического сечения πa^2 . Наконец, посчитаем добротность резонанса в этом случае:

$$Q_{\text{max}} = \frac{\omega_0}{\gamma_{\text{rad}}} = \frac{3}{A} \frac{1}{(ka)^3} \gg 1. \quad (4.21i)$$

4-4.1.3 Взаимодействие частиц со светом в различных экспериментальных ситуациях

Теперь восстановим потери внутри частицы и исследуем параметры рассеяния и поглощения. Предположим, что мы рассматриваем рассеяние и прохождение световой волны через прозрачную среду, в которой случайным образом раскиданы рассматриваемые рассеиватели, заполняющие малую долю общего объёма. Примером могут служить коллоидные растворы взвешенных частиц.

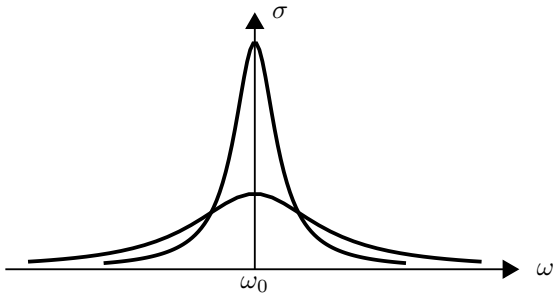


Рис. 4.5 Вклады резонансного вклада в сечение взаимодействия при разных (различающихся в 3 раза) добротностях резонанса. Площади под кривыми равны друг другу.

Положим, как это часто бывает на практике, что внутренние потери доминируют, так что полная ши-

рина резонанса $\gamma \gg \gamma_{\text{rad}}$. Учтём также возможную отстройку частоты падающей волны от резонанса, полагая $\delta\omega \neq 0$. Сечение взаимодействия (4.21c) и сечения рассеяния (4.21d) в условиях резонанса, когда $\delta\omega = 0$, равны

$$\sigma = \frac{\pi A \cdot ka \cdot \omega_0 \gamma}{(\delta\omega)^2 + \gamma^2} a^2 = \frac{\gamma_{\text{rad}} \gamma}{(\delta\omega)^2 + \gamma^2} \sigma_{\text{max}}, \quad (4.21j)$$

$$\sigma_s = \frac{2\pi A^2 \cdot (ka)^4 \cdot \omega_0^2}{3((\delta\omega)^2 + \gamma^2)} a^2 = \frac{\gamma_{\text{rad}}^2}{(\delta\omega)^2 + \gamma^2} \sigma_{\text{max}},$$

то есть малы по сравнению с теоретически максимально возможным сечением рассеяния σ_{max} .

Предположим, что рассеиваемая световая волна является монохроматической и её частота находится в резонансе, $\delta\omega = 0$. В соответствии с нашими выводами, при увеличении внутренних потерь интенсивность прошедшей волны возрастает, тогда как интенсивность рассеянной волны падает. Возрастание коэффициента прохождения называют *эффектом просветления*.

Пусть теперь на частице рассеивается белый свет со спектральной шириной Δ , большой по сравнению с шириной резонанса, но малой по сравнению с расстоянием по частоте до соседнего резонанса. Усреднённое сечение взаимодействия равно

$$\sigma = \frac{1}{\Delta} \int \sigma(\delta\omega) d\delta\omega = \frac{\pi \gamma_{\text{rad}}}{\Delta} \sigma_{\text{max}}, \quad (4.21k)$$

то есть не зависит от ширины резонанса. Сечение рассеяния

$$\sigma_s = \frac{\pi \gamma_{\text{rad}}^2}{\Delta \gamma} \sigma_{\text{max}}, \quad (4.21l)$$

то есть уменьшается обратно пропорционально внутренним потерям. Таким образом, полная интенсивность прошедшего света (уже не белого) не изменяется при увеличении потерь, тогда как интенсивность рассеянного света уменьшается.

4-4.2 Задачи

• **Задача 1:** Определите сечение рассеяния электромагнитной волны с частотой $f = 1$ МГц на стеклянном эллипсоиде вращения (диэлектрическая проницаемость стекла на этой частоте $\varepsilon = 3.75$). Волна линейно поляризована. Главная ось эллипсоида лежит в плоскости, ортогональной направлению распространения волны и повернута на угол $\phi = \pi/6$ относительно направления электрического поля волны. Длина главной полуоси эллипсоида равна $b = 2$ см, длина малой полуоси равна $a = 1$ см. *Указание:* Введите декартову систему координат $Oxyz$, у которой ось Oz сонаправлена волновому вектору падающей волны, а ось Ox направлена по главной оси эллипсоида.

4-4.2.1 Рассеяние на хорошо проводящем шаре

• **Задача 2:** Вычислить сечение рассеяния σ монохроматической электромагнитной волны идеально проводящим шаром. Радиус шара a мал по сравнению с длиной волны λ .

На шаре волной будут индуцироваться дипольный $\mathbf{d}$ и магнитодипольный $\boldsymbol{\mu}$ моменты. Для определения величины этих моментов надо полагать, что распределение полей вблизи шара является квази-стационарным, а поле падающей волны однородно в пространстве. Задача об электро-дипольном моменте решена в рамках рассмотрения электростатики, см. Пункт 2-1.1. В нашем случае мы должны устремить $\varepsilon \rightarrow \infty$ в (2.6), получив электро-дипольную восприимчивость

$$\alpha_d = a^3. \quad (4.22a)$$

При этом на поверхности шара касательное электрическое поле равно нулю, как и должно быть на поверхности идеального металла (4.5p). Наведённый магнитодипольный момент $\boldsymbol{\mu}$ сонаправлен магнитному полю и по амплитуде должен быть таков, чтобы нормальная компонента магнитного поля была равно нулю,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \frac{3(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu})\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}}{r^3},$$

$$B_n|_{r=a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\boldsymbol{\mu}}{a^3} + \mathbf{B}_0 = 0. \quad (4.22b)$$

Значит,

$$\mathbf{d} = a^3 \mathbf{E}_0, \quad \boldsymbol{\mu} = -\frac{a^3}{2} \mathbf{B}_0. \quad (4.22c)$$

Воспользовавшись выражением (4.21d) для сечения рассеяния (сечение поглощения равно нулю) через электро- и магнито-дипольную восприимчивости, получаем

$$\sigma = \frac{10\pi}{3} (ka)^4 a^2. \quad (4.22d)$$

Отметим, что вклад в сечение магнито-дипольной восприимчивости в 4 раза меньше, чем дипольной восприимчивости. Вычислим также поля на поверхности шарика:

$$\mathbf{E} = 3(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \quad \mathbf{B} = \frac{3}{2}(\mathbf{B}_0 - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}). \quad (4.22e)$$

• **Задача 3:** Вычислить сечение поглощения σ_a монохроматической электромагнитной волны проводящим шаром с малым поверхностным импедансом $\zeta = \zeta' + \zeta''$. Радиус шара a мал по сравнению с длиной волны λ , но велик по сравнению с глубиной скин-слоя δ , $\delta \ll a \ll \lambda$.

§4-5. Рассеяние на мелких сферических частицах

Здесь мы рассматриваем рассеяние плоской электромагнитной волны на сферической частице, размер которой a мал по сравнению с длиной волны в окружающем пространстве, так что

$$ka \ll 1, \quad \text{от } \lambda \gg a, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (4.23)$$

В этом случае, с одной стороны, применима теория, развитая в Пункте 4-4 для рассеяния на частицах малого размера. С другой стороны, сферическая геометрия допускает полное математическое исследование задачи.

Вдали от резонансов сечения рассеяния и поглощения определяются размером частицы. Если в материале частицы не происходит поглощения (например, материалом является прозрачный диэлектрик или идеальный металл), то сечение поглощения равно нулю, а сечение рассеяния оценивается как $\sigma_s \sim (ka)^4 a^2$, поскольку дипольная восприимчивость $\alpha_d \sim a^3$, см. Пункт 4-4.2.1. Учтём теперь потери для случая металлической частицы, когда глубина скин-слоя δ мала по сравнению с её размерами, $\delta \ll a$. Тогда сечение поглощения $\sigma_a \sim \zeta' a^2$, где ζ' — действительная часть поверхностного импеданса, см. Пункт 4-5.3. Эта оценка следует из того, что распределение магнитного поля вокруг частицы будет почти совпадать с распределением для случая идеального

металла. В случае же идеального металла магнитное поле огибает частицу, так что его значение на поверхности оказывается порядка его амплитуды в падающей волне.

Перейдём к резонансным эффектам. На частицах малого размера могут быть два сорта резонансных явлений. В первом случае, разобранный в Пунктах 4-5.1.4, 4-5.2.2, материал частицы представляет собой прозрачный оптически плотный диэлектрик, так что его показатель преломления велик, $n \gg 1$. Резонансные явления возникают, когда длина волны в материале частицы становится сравнимой или меньше диаметра частицы, $nka \gtrsim \pi$. Качественно, этот тип резонанса можно описать следующим образом. В силу большого показателя преломления происходит почти полное внутреннее отражение волны, возбуждённой внутри шара. При определённом размере частицы достигается условие существования резонансной моды внутри шара, то есть интерференция переотражённой волны с исходной оказывается положительной. Эта мода соответствует гармоническим колебаниям, в процессе которых полная энергия переходит из энергии электрического и в энергию магнитного полей и обратно.

Во втором случае, разобранный в Пункте 4-5.2.4, резонанс достигается на металлических частицах с низки-

ми потерями на частотах ниже плазменной на некоторый числовой фактор порядка единицы. Длина волны (точнее, глубина проникновения δ) в металле должна быть велика по сравнению с размерами частицы, $\delta \gg a$. В этом пределе для самого интересного случая дипольной моды возможно воспользоваться выражением для дипольной восприимчивости частицы (4.29). Резонансное поведение в (4.29) обнаруживается при стремлении диэлектрической проницаемости ϵ к значению -2 . Помимо металлов, подходящим материалом может для такого рода резонанса быть, например, диэлектрик на частоте, несколько выше резонансной фоновой частоты. Резонансное значение диэлектрической проницаемости $\epsilon_{res} = -2$ определяется сферической формой частицы, для вытянутых частиц резонансное значение диэлектрической проницаемости оказывается численно другим. Резонансная мода соответствует гармоническим колебаниям, при которых потенциальной и кинетической энергиям соответствуют энергия электрического поля и кинетическая энергия электронов в металле (или, для фононного резонанса — колебательная энергия кристаллической решётки).

Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что комплексная амплитуда поля падающей волны есть

$$\mathbf{E}_0 e^{ikz - i\omega t}, \quad \mathbf{H}_0 e^{ikz - i\omega t}, \quad (4.24a)$$

а частица находится в начале координат. Ввиду сферической симметрии задачи мы будем пользоваться сферическими координатами $\{r, \theta, \varphi\}$. Поле удовлетворяет волновым уравнениям

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \epsilon k^2 \mathbf{E}, \quad (4.24b)$$

$$\epsilon \text{ rot } \frac{1}{\epsilon} \text{ rot } \mathbf{H} = [\mathbf{H} \times \mathbf{g}] - \Delta \mathbf{H} = \epsilon k^2 \mathbf{H}.$$

где логарифмический градиент диэлектрической проницаемости $\mathbf{g} = \text{grad } \ln \epsilon$ направлен по радиусу, $\mathbf{g} \parallel \mathbf{r}$. В операторе Лапласа удобно выделить радиальную и угловую части,

$$\Delta = \frac{1}{r} \partial_r^2 r + \frac{1}{r^2} \Delta_a, \quad (4.24c)$$

где Δ_a есть оператор Бельтрами-Лапласа на поверхности сферы единичного радиуса.

Исчерпывающее математическое исследование рассеяния электромагнитной волны на однородном шаре впервые было произведено начале XX века Густавом Ми [Mie, 1908] и систематически изложена в [Bohren и Huffman, 2008]. Хотя здесь мы рассматриваем только электро-дипольный и магнито-дипольный каналы рассеяния, изложение Пунктов 4-5.1 и 4-5.2 допускает прямое обобщение на поиск амплитуд рассеяния для любой угловой гармоники, т.е. изложены общие принципы построения теории Ми. Теория рассеяния на сферических частицах малого размера вдали от резонансных явлений хорошо изложена в [Ландау и Лифшиц, 1982, §92]. Рассмотрение этого параграфа включает в том числе и резонансное рассеяние на таких частицах.

4-5.1 Магнито-дипольное рассеяние

Пусть материал сферической частицы имеет диэлектрическую проницаемость ϵ и не обладает магнитными свойствами. В этом пункте мы исследуем рассеяние на такой частице в магнито-дипольном канале. Пусть комплексная амплитуда колебаний магнитного диполя частицы равна $\boldsymbol{\mu}$, так что физический дипольный момент равен $2 \text{Re}(\boldsymbol{\mu} e^{-i\omega t})$. Из соображений симметрии следует, что магнито-дипольный момент должен быть пропорционален амплитуде магнитного поля в падающей волне,

$$\boldsymbol{\mu} = \alpha_m \mathbf{H}_0, \quad (4.25a)$$

где магнитная поляризуемость α_m подлежит нахождению.

4-5.1.1 Пространственная структура поля с магнитной симметрией

Установим структуру поля вне и внутри частицы. Искомая часть электромагнитного поля, обладающая магнито-дипольной симметрией, во всём пространстве задаётся параметризацией

$$\mathbf{H} = -\frac{i}{k} \text{rot rot}(\mathbf{r}\chi), \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon k^2} \text{rot}(\mathbf{r}\Delta\chi), \quad (4.25b)$$

Выражение для электрического поля $\mathbf{E}$ мы получили из выражения для $\mathbf{H}$ с использованием уравнению Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}$ и тождества $\Delta \text{rot}(\mathbf{r}\chi) = \text{rot}(\mathbf{r}\Delta\chi)$. Из определения (4.25b) следуют равенства

$$ik\mathbf{H} = -\mathbf{r}\Delta\chi + \text{grad } \partial_r(\mathbf{r}\chi). \quad (4.25c)$$

Проекция этого уравнения на $\mathbf{n}$ и на плоскость, нормальную к $\mathbf{n}$, дают

$$ikH^r = -\frac{1}{r} \Delta_a \chi, \quad ik\delta_{\perp}^{ij} H^j = \delta_{\perp}^{ij} \partial_j \partial_r(\mathbf{r}\chi), \quad (4.25d)$$

где оператор Лапласа на сфере единичного радиуса Δ_a определён в (4.24c), а $\delta_{\perp}^{ij} = \delta^{ij} - n^i n^j$ есть проектор на плоскость, ортогональную радиальному направлению. Из выражений (4.25d), в частности, следует, что нулевая угловая гармоника в χ не вносит вклада в магнитное поле (так и должно быть), поэтому амплитуду нулевой гармоники в χ можно считать равной нулю.

Установим волновое уравнение на χ . Проекция на радиальное направление волнового уравнения на $\mathbf{H}$ (4.24b) есть

$$-(\Delta \mathbf{H})^r = \epsilon k^2 H^r \quad \text{or} \quad \text{rot}(\mathbf{r}(\epsilon k^2 \chi + \Delta \chi)) = 0. \quad (4.25e)$$

Таким образом, скалярная функция χ удовлетворяет волновому уравнению,

$$(\Delta + \epsilon k^2) \chi = 0 \quad (4.25f)$$

во всём пространстве. Отсутствие пространственных производных от ϵ в (4.25f) соответствует тому, что электрическое поле не имеет радиальной компоненты, $\mathbf{E} \perp$

$\mathbf{n}$, поэтому оно бездивергентно, $\text{div } \mathbf{E} = 0$. Например, так же обстоит дело в ТЕ-модах в плоски волноводах, см. § 5-5, что приводит к аналогичному волновому уравнению (5.17b).

Если зависимость $\varepsilon(r)$ имеет скачок, то на границе раздела непрерывность потенциала и его производной

$$\chi, \quad \partial_r \chi. \quad (4.25g)$$

следует из условия непрерывности на границе раздела всех компонент магнитного поля (4.25d) или же непосредственно из волнового уравнения (4.25f).

На близких расстояниях $kr \ll 1$ вне частицы магнитное поле можно в главном приближении считать потенциальным, $\mathbf{H} \approx -\text{grad } \Phi_H$ с магнито-дипольным потенциалом, равным

$$\Phi_H = \frac{i}{k} \partial_r (r\chi). \quad (4.25h)$$

Это равенство следует из точного выражения для магнитного поля (4.25c), в котором мы пренебрегли первым слагаемым, поскольку оно является малой поправкой порядка $(kr)^2 \ll 1$, что следует из волнового уравнения (4.25b).

Сферически-симметричными решениями волнового уравнения (4.25f) в случае однородной сферической частицы являются (нас интересует регулярное решение внутри и расходящаяся волна вне частицы)

$$\text{in: } f_i(\mathbf{n}kr) = \frac{\sin(\mathbf{n}kr)}{\mathbf{n}kr}, \quad \text{out: } f_o(kr) = \frac{\exp(ikr)}{kr}, \quad (4.25i)$$

где $\mathbf{n} = \sqrt{\varepsilon}$ есть в данном случае комплексный показатель преломления. Сами по себе решения (4.25i) физически не интересны, поскольку они приводят к нулевому электромагнитному полю (4.25b). Из них, однако, возможно получить физически интересные решения путём пространственного дифференцирования.

4-5.1.2 Магнито-дипольный канал рассеяния

Магнито-дипольный канал рассеяния описывается потенциалом χ с угловым моментом $l = 1$. Это видно, например, из выражения (4.25h) для потенциала магнитного поля Φ_H , поскольку потенциал магнитного диполя есть как раз сферическая гармоника с $l = 1$. Из сферически-симметричных решений (4.25i) решения с нужной угловой симметрией строятся путём однократного (поскольку $l = 1$) действия оператора градиента ∇ :

$$\chi_{\text{in}} = -\frac{3i}{2\varepsilon k} (\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n}) H \partial_r f_i(\mathbf{n}kr), \quad (4.25j)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\text{out}} &= -ik^2 (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) f_o(kr) = \\ &= -ik^2 (\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n}) \alpha_m \partial_r f_o(kr), \end{aligned} \quad (4.25k)$$

где H — отношение комплексной амплитуды поля в центре шарика к амплитуде внешнего поля, см. ниже

(4.25n, 4.25o). Для того, чтобы убедиться в правильности коэффициента пропорциональности в (4.25k), заметим, что оно вместе с соотношением (4.25h) означает, что потенциал магнитного поля Φ_H вне частицы и вблизи неё равен

$$\Phi_H = -(\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \frac{1}{r}, \quad (4.25l)$$

как и должно быть по определению (4.25a).

Вклад в $(l = 1)$ -гармонику потенциала χ (4.25b) от падающей волны имеет вид

$$\chi_{\text{ext}} = C(\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) f_i(kr) = C(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n}) \partial_r f_i(kr). \quad (4.25m)$$

Обратим внимание, что в (4.25m) была взята именно стоячая волна (т.е. функция f_i , а не функция f_o (4.25i)), поскольку падающая волна не создаёт потока к/от центра. Вблизи начала координат потенциал χ_{ext} (4.25m) задаёт однородное магнитное поле согласно (4.25b), которое должно быть равно $\mathbf{H}_0$

$$\chi_{\text{ext}} \approx -\frac{Ck^2}{3} (\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}), \quad \mathbf{H} \approx \frac{2ik}{3} C \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0. \quad (4.25n)$$

Таким образом, $C = -3i/2k$, то есть

$$\chi_{\text{ext}} = -\frac{3i}{2k} (\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n}) \partial_r f_i(kr). \quad (4.25o)$$

В нашем случае при написании граничных условий (4.25g) следует учесть, что потенциал внутри есть χ_{in} (4.25j), а снаружи потенциал равен сумме $\chi_{\text{out}} + \chi_{\text{ext}}$ (4.25k, 4.25o). Сформулированная задача в терминах потенциала χ идентична задаче о рассеянии квантовой частицы сферически-симметричной потенциальной ямой с прямоугольными стенками радиуса a в p -канале; масса частицы равна единице, её энергия равна $k^2/2$, а глубина потенциала есть $(\varepsilon - 1)k^2/2$.

Граничные условия (4.25g) на решениях (4.25j, 4.25k), записанные в виде

$$-ik^{-3}(\chi_{\text{in}} - \chi_{\text{out}}) = -ik^{-3}\chi_{\text{ext}}$$

$$-iak^{-3}\partial_r(\chi_{\text{in}} - \chi_{\text{out}}) = -iak^{-3}\partial_r\chi_{\text{ext}},$$

приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} 3H/2nb^2k^3 \\ \frac{\alpha_m e^{i\tilde{a}}}{\tilde{a}^2} \end{pmatrix} &= \\ &= \frac{3}{2k^3} \begin{pmatrix} (\sin \tilde{a} - \tilde{a} \cos \tilde{a})/\tilde{a}^2 \\ \frac{(\tilde{a}^2 - 2) \sin \tilde{a} + 2\tilde{a} \cos \tilde{a}}{\tilde{a}^2} \end{pmatrix} \rightarrow \frac{\tilde{a}}{2k^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.25p)$$

В процессе выкладок мы, в частности, помножили обе части уравнения на i , нижнюю строчку домножили на $\tilde{a} = ka$, и ввели ещё один безразмерный параметр $b =$

nka . Последний переход в (4.25p) совершён в пределе $\tilde{a} \ll 1$. Матрица $\hat{\mathcal{M}}$ равна

$$\hat{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \sin b - b \cos b & -1 + i\tilde{a} \\ (b^2 - 2) \sin b + 2b \cos b & 2 - 2i\tilde{a} - \tilde{a}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.25q)$$

Левый столбец в матрице (4.25q), как и должно быть, подобен столбцу в правой части уравнения (4.25p) с заменой $b \leftrightarrow \tilde{a}$.

4-5.1.3 Пренебрежение переизлучением

Будем считать, что излучение несущественно, при этом шар мал по сравнению с длиной волны падающего излучения, $ka \ll 1$, диэлектрическая проницаемость велика, $|\varepsilon| \gg 1$, и мы находимся вдали от резонансов, смотри ниже Пункт 4-5.1.4. Тогда волновые свойства электромагнитного поля следует учитывать только внутри шара, а снаружи ограничиться квази-статическим приближением и, соответственно, не учитывать переизлучение, производимое шаром. Это означает, что в выражении для матрицы $\hat{\mathcal{M}}$ (4.25q) следует положить $\tilde{a} \rightarrow 0$, а в самом уравнении (4.25p) столбец в правой части взять в линейном по $\tilde{a}$ приближении. Решением (4.25p) в этом пределе является

$$\alpha_m = \frac{a^3}{2} \left(\frac{3}{(nka)^2} - 1 - \frac{3}{nka} \operatorname{ctg}(nka) \right). \quad (4.26a)$$

В пределе малой глубины скин-слоя по сравнению с радиусом частицы, когда $\operatorname{Im}(nka) \gg 1$ и положительно, так что $\operatorname{ctg}(nka) = -i$, магнитная поляризуемость

$$\alpha_m = -\frac{a^3}{2} \left(1 - \frac{3i}{nka} \right), \quad (4.26b)$$

что уточняет результат решения о рассеянии на идеально проводящем шаре (4.22c) для большого, но конечного ε и даёт возможность вычислить мнимую часть магнито-дипольной поляризуемости. Отметим, что выше в Пункте 4-4.2.1 мнимая часть в (4.26c) была получена технически более простым путём через вычисление поглощения в скин-слое.

В пределе же малого размера шара $nka \ll 1$ получаем непосредственно из (4.25p)

$$\alpha_m = \frac{(\varepsilon - 1)(ka)^2 a^3}{30}. \quad (4.26c)$$

Вклад в (4.26c), пропорциональный ε , может быть получен из (4.26a) путём выделения асимптотики при $nka \ll 1$.

4-5.1.4 Резонанс на диэлектрическом шаре

Магнито-дипольный резонанс на диэлектрической грануле становится хорошо выраженным, если показатель преломления n материала шарика велик, $n \gg 1$, тогда

размер шарика оказывается значительно меньше длины волны в окружающем пространстве, $a \sim \lambda/n$. При этом показатель поглощения должен быть мал, $k \ll 1$.

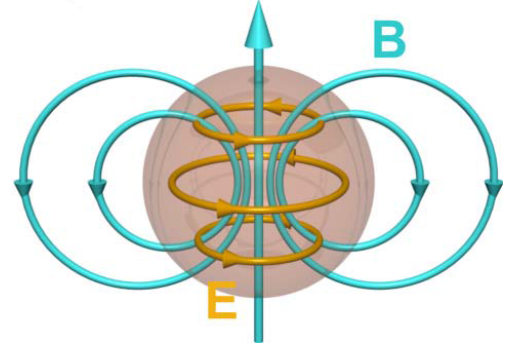


Рис. 4.6 Качественное изображение структуры электромагнитного поля для магнито-дипольной моды.

Рисунок взят из [Kuznetsov и др., 2012].

В предположении резонанса и высокого показателя преломления параметры $b = nka \sim 1$, $\tilde{a} = ka \ll 1$. Если положить $\tilde{a} = 0$ (что соответствует пренебрежению потерями на излучение), то условие резонанса приводит к простому уравнению

$$\det \hat{\mathcal{M}} = 0: \quad \sin b \equiv \sin(nka) = 0. \quad (4.27a)$$

Магнито-дипольная восприимчивость (4.26a), вычисленная в пределе $\tilde{a} = 0$, в точках (4.27a) обращается в бесконечность. Условием самого первого резонанса является

$$b_{res} = \pi, \quad \text{or} \quad \lambda = 2na. \quad (4.27b)$$

Точное уравнение $\det \hat{\mathcal{M}} = 0$ для (4.25q) выглядит следующим образом:

$$n\tilde{a} \cos(n\tilde{a}) + (-1 + (1 - i\tilde{a})n^2) \sin(n\tilde{a}) = 0. \quad (4.27c)$$

Учтём конечность размера гранулы, записав приближённое по малому параметру $\tilde{a}$ условие резонанса, уточнив таким образом (4.27b):

$$b_{res} = \pi - \frac{\tilde{a}^2 + i\tilde{a}^3}{\pi}. \quad (4.27d)$$

Теперь положим, что есть небольшая отстройка по частоте, так что $b = b'_{res} + \delta b$, где b'_{res} есть действительная часть (4.27d). Решением (4.25p) является

$$\alpha_m = -\frac{3/2}{\pi \delta b / a^3 + i k^3}, \quad H = \frac{\pi n}{\pi \delta b / \tilde{a}^3 + i}, \quad (4.27e)$$

сравни с (4.21f). Если внутренние потери равны нулю, $k = 0$, то в резонансе достигается $\delta b = 0$, и

$$\mu = \frac{3i}{2k^3} \mathbf{H}_0, \quad \sigma_{\max} = \frac{3\pi}{2k^2}, \quad H = -i\pi n, \quad (4.27f)$$

где $\sigma_{\max}$ — сечение рассеяния в резонансе, сравни с (4.21h). Будем считать, что дисперсия коэффициента

преломления $\mathbf{n}$ вблизи резонанса несущественна, то есть $\delta b = \mathbf{n} \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{k}$. Тогда добротность резонанса (4.21i) равна

$$Q = \frac{\mathbf{n}^3}{\pi}. \quad (4.27g)$$

4-5.2 Электро-дипольное рассеяние

Проведя исследование в магнитно-дипольном канале в Пункте 4-5.1, перейдём к исследованию рассеяния в электро-дипольном канале. Комплексная амплитуда колебаний электрического диполя частицы равна $\mathbf{d}$, так что физический момент равен $2 \operatorname{Re}(\mathbf{d} e^{-i\omega t})$. Электро-дипольный момент должен быть пропорционален амплитуде электрического поля в падающей волне,

$$\mathbf{d} = \alpha_d \mathbf{E}_0. \quad (4.28a)$$

Электрическая поляризуемость α_d зависит от частоты, размера частицы и диэлектрической проницаемости её материала.

4-5.2.1 Пространственная структура поля с электрической симметрией

По аналогии с (4.25b), определим поля через потенциал η :

$$\mathbf{E} = -\frac{i}{\varepsilon k} \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{r}\eta), \quad \mathbf{H} = -\operatorname{rot}(\mathbf{r}\eta). \quad (4.28b)$$

Уравнение Максвелла (1.9a) оказывается автоматически удовлетворённым. Отсюда, в частности, следует, что магнитное поле тангенциально, $\mathbf{H} \perp \mathbf{n}$. Для того, чтобы определить волновое уравнение на η , запишем уравнение Максвелла (1.9b)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}. \quad (4.28c)$$

В нём ненулевыми являются только тангенциальные компоненты, так что это уравнение может быть приведено к виду

$$[\mathbf{n} \times \nabla] \left(\frac{1}{\varepsilon} \Delta \eta - \frac{\partial_r \varepsilon}{\varepsilon^2} \partial_r(r\eta) + k^2 r\eta \right) = 0. \quad (4.28d)$$

Производная по углу $[\mathbf{n} \times \nabla]$ может быть снята, поскольку мы не должны рассматривать однородные по углу решения. Поэтому искомым волновым уравнением является

$$\partial_r \frac{1}{\varepsilon} \partial_r(r\eta) + \frac{1}{\varepsilon r^2} \Delta_a(r\eta) + k^2(r\eta) = 0. \quad (4.28e)$$

Полученное уравнение (4.28e) соответствует уравнению на ТМ-моды в плоском волноводе (5.18a), поскольку в рассматриваемой задаче рассеяния магнитное поле также тангенциально направлению изменения диэлектрической проницаемости.

Если диэлектрическая проницаемости $\varepsilon(r)$ испытывает скачок на поверхности частицы, при $r = a$, то из

волнового уравнения (4.28e) следует, что на поверхности должны быть непрерывны комбинации

$$\eta, \quad \frac{\partial_r(r\eta)}{\varepsilon}, \quad (4.28f)$$

сравни с (4.25g).

Вне частицы, на расстояниях, малых по сравнению с длиной волны в окружающем пространстве, для описания структуры электромагнитного поля в главном порядке по малому параметру ka можно пренебречь эффектами запаздывания. Если вблизи гранул доминирует электрическое поле, т.е. верно квази-статическое приближение, то для описания электрического поля можно ограничиться потенциалом поля Φ , $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi$. Выражения для потенциала

$$\Phi = \frac{i}{k} \partial_r(r\eta), \quad (4.28g)$$

сравни с (4.25h).

4-5.2.2 Электро-дипольный канал рассеяния

По аналогии с (4.25o) заключаем, что вклад в угловую гармонику $l = 1$ от падающей волны в потенциал η равен

$$\eta_{\text{ext}} = -\frac{3i}{2k} (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) f_i(kr) = -\frac{3i}{2k} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n}) \cdot \partial_r f_i(kr), \quad (4.28h)$$

где, напомним, функция $f_i(z)$ определена в (4.25i). Поле внутри частицы и индуцированное ею снаружи есть

$$\eta_{\text{in}} = ik^2 (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n}) B \cdot \partial_r f_i(nkr), \quad (4.28i)$$

$$\eta_{\text{out}} = -ik^2 (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n}) \alpha_d \cdot \partial_r f_o(kr). \quad (4.28j)$$

Граничные условия (4.28f) для потенциала η отличаются от граничных условий (4.25g) для потенциала χ . Поэтому изменяется как матрица $\hat{\mathcal{M}}$, так и столбец в правой части (4.25p) оказываются другие. Теперь уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} \mathbf{n}B/b^2 \\ \frac{\alpha_d e^{i\tilde{a}}}{\tilde{a}^2} \end{pmatrix} &= \frac{3}{2k^3} \begin{pmatrix} (\tilde{a} \cos \tilde{a} - \sin \tilde{a})/\tilde{a}^2 \\ \tilde{a} \cos \tilde{a} + (\tilde{a}^2 - 1) \sin \tilde{a} \\ \tilde{a}^2 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow -\frac{\tilde{a}}{k^3} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.28k)$$

где матрица

$$\hat{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} b \cos b - \sin b & 1 - i\tilde{a} \\ \frac{b \cos b + (b^2 - 1) \sin b}{\varepsilon} & 1 - i\tilde{a} - a^2 \end{pmatrix}. \quad (4.28l)$$

4-5.2.3 Пренебрежение переизлучением

Если в матрице $\hat{M}$ (4.281) положить малый параметр $\tilde{a} \rightarrow 0$, то дипольная поляризуемость оказывается равной

$$\alpha_d = \left(1 + \frac{3}{2(\varepsilon - 1)} \cdot \frac{b \operatorname{ctg} b - 1 + b^2}{b \operatorname{ctg} b - 1 - b^2/(\varepsilon - 1)} \right) a^3. \quad (4.28m)$$

Это выражение следует сравнить с магнито-дипольной поляризуемостью (4.26a). Обратим внимание, что если в правой части (4.28m) при фиксированном значении b устремить диэлектрическую проницаемость в бесконечность, $\varepsilon \rightarrow \infty$, то мы получим электро-дипольную поляризуемость идеально проводящего шара $\alpha_d = a^3$ (4.22a). Таким путём, однако, мы потеряем факт наличия резонансов.

Первый электро-дипольный резонанс при высоком значении показателя преломления $n \gg 1$ на диэлектрическом шарике определяется уравнением $\operatorname{tg} b = b$, то есть приблизительно $\lambda \approx 1.4an$. Эта длина волны короче, чем длина волны $\lambda = 2an$ (4.27b), на которой происходит магнито-дипольный резонанс. Таким образом, самый первый резонанс на диэлектрической частицы с высоким показателем преломления, если двигаться из красной области спектра, есть магнито-дипольный резонанс.

4-5.2.4 Поверхностный плазмонный резонанс на металлической грануле

Оригинальные работы: [Ogale, Bhoraskar и Panat, 1978] и [Boardman и Paranjape, 1977].

Дипольный момент: в пределе малого запаздывания, когда $ka \ll 1$ и $nka \ll 1$, т.е. когда малы смещение резонанса вследствие конечности размера частицы и излучение, поведение дипольного момента вблизи резонанса имеет вид

$$d = \alpha E_0, \quad \alpha = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - \varepsilon_{res}} a^3, \quad (4.29)$$

$$\varepsilon_{res} \approx -2 - \frac{2}{5}(ka)^2 - 2i(ka)^3.$$

В главном приближении по ka выражение совпадает с результатом рассмотрения электростатической задачи, см. (2.6). Первая поправка в ε_{res} определяет смещение положения резонанса вследствие конечно размера частицы. Коэффициент перед $(ka)^2$ не может быть найден феноменологическим путём и может быть получен разложением знаменателя в (4.28m) по малому $b \ll 1$. Мнимая часть поправки к ε_{res} (4.29) связана с переизлучением частицей электромагнитных волн и может быть найдена согласно процедуре, описанной в Пункте 4-4.1.2. Электрическое поле внутри частицы

$$E_{in} = \frac{3d}{(\varepsilon - 1)a^3} = \frac{3}{\varepsilon - \varepsilon_{res}} E_0$$

4-5.3 Задачи

• **Задача 1:** Определите дипольную восприимчивость α маленького металлического шарика вблизи плазмонной частоты, если потерями на излучение можно пренебречь. Используйте общее выражение (2.6) для поляризуемости шара в электрическом поле (т.е., пренебрегите потерями на излучение) и модель Друде (5.32a) для диэлектрической проницаемости металла. Сравните положение резонансной частоты с верхней границей частотной области, где существуют поверхностные плазмоны.

• **Задача 2:** Вычислить сечения поглощения σ_a и рассеяния σ_s монохроматической электромагнитной волны на металлическом шарике, размер которого a мал по сравнению с глубиной скин-слоя, $a \ll \delta$, полагая, что частота падающей волны ω близка к резонансной частоте дипольной поверхностной плазмонной моды шарика. Литература: §4-4.

• **Задача 3:** Покажите, что в плазмонном резонансе на малой металлической грануле средняя энергия колебаний, запасённая в электрическом поле, равна средней кинетической энергии электронов. Используйте общее выражение (2.6) для поляризуемости шара в электрическом поле (т.е., пренебрегите потерями на излучение) и модель Друде (5.32a) для диэлектрической проницаемости металла в пределе малых потерь.

• **Задача 4:** Пусть известна формула (4.26a) для магнито-дипольной восприимчивости малой сферической диэлектрической частицы далеко от резонансов. Рассмотрим первый резонанс, определяемый равенством $nka = \pi$ (4.27b). Примем, что в материале частицы нет потерь вблизи этой частоты. Используя общую теорию для резонансного поведения рассеяния на мелких частицах, см. § 4-4 и, в частности, выражение (4.21b) для поляризуемости в резонансе, установите поведение поляризуемости диэлектрического шарика вблизи рассматриваемого резонанса.

• **Задача 5:** Рассмотрим гранулу сферической формы радиуса a , находящуюся в вакууме и имеющую температуру T . Радиус гранулы мал на частоте $\omega_T = T/\hbar$, соответствующей температуре, $\sqrt{\varepsilon}ka \ll 1$, при этом задана дисперсия диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ материала частицы, а его магнитная восприимчивость равна единице (предполагается, что радиус гранулы всё же достаточно велик для того, чтобы возможно было пользоваться приближением локальной связи между электрическим полем и плотностью тока). Найти в общем виде интенсивность теплового излучения гранулы на частоте, выразив её через $\varepsilon(\omega)$. Чему равна характерная частота излучения, какой приближённый вид принимает диэлектрическая проницаемость на этой частоте? Найти полную интенсивность излучения для модели Друде, в которой статическая проводимость металла равна σ . Металл немагнитный, температура T (измеряется в эрг) мала по сравнению с

частотой, на которой нормальный скин-эффект переходит в аномальный, кроме того $T \ll \hbar\sigma$ и $T \ll \hbar/\tau$, где τ — время релаксации электронов.

Указание: Найдите гамильтониан взаимодействия между полем электромагнитной волны и дипольным моментом гранулы, имеющим общий вид (7.1a). Затем, чтобы вычислить тепловую амплитуду колебаний электро- и магнито-дипольного моментов гранулы вос-

пользуйтесь флуктуационно-диссипационной теоремой (7.17f) (для определения интенсивности излучения из квадрата амплитуды колебаний надо вычесть квадрат амплитуды квантовых флуктуаций при нулевой температуре). В соответствии с условием задачи, следует считать длину волны большой по сравнению с размером гранулы.

ВОЛНОВОДЫ

§5-1. Волноводы

Волноводами называются конструкции из различных материалов, вдоль которых распространяются направленные электромагнитные волны, интенсивность которых спадает при удалении от сердцевины волновода. Мы рассматриваем прямые волноводы, однородные вдоль направления распространения сигнала. Вдоль этого направления выберем ось Oz декартовой системы координат $Oxyz$. Отклик среды на электромагнитное поле определяется диэлектрической проницаемостью ε , которая зависит только от поперечных координат, то есть $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ при указанном выборе системы координат (если явно не оговорено противное, рассматриваем немагнитные среды). Операторы градиента и Лапласа в поперечной плоскости обозначим как

$$\nabla_{\perp} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}, \quad \Delta^{\perp} = \partial_x^2 + \partial_y^2. \quad (5.1a)$$

Будем искать монохроматические волны, распространяющиеся вдоль волновода. Для этого будем предполагать, что в монохроматической волне все поля от времени t и продольной координаты z зависят как

$$\exp(-i\omega t + i\beta z), \quad (5.1b)$$

где β называется постоянной распространения. В общем случае β может иметь ненулевую мнимую часть, что означает затухание интенсивности волны по мере её распространения. Мы также будем обозначать волновой вектор в пустоте на частоте волны

$$k = \omega/c. \quad (5.1c)$$

Целью рассмотрения является определение набора направленных мод, поддерживаемых волноводом на данной частоте. Интерес представляют законы дисперсии мод $\beta(\omega)$, а также поперечная структура электромагнитного поля в каждой моде.

5-1.1 Уравнения Максвелла и волновые уравнения

Геометрия волновода разделяет поперечные x, y - и продольную z -координату. Поэтому прежде всего проектируем уравнения Максвелла отдельно на поперечную плоскость и на продольное направление. Векторные уравнения Максвелла (1.14f) для поперечных компонент

с учётом зависимости (5.1b) приобретают вид

$$\nabla_{\perp} E^z - i\beta \mathbf{E}^{\perp} = -i\mu k \hat{\mathbf{e}} \mathbf{H}^{\perp} \quad (5.2a)$$

$$\hat{\mathbf{e}} \nabla_{\perp} H^z - i\beta \hat{\mathbf{e}} \mathbf{H}^{\perp} = -i\varepsilon k \mathbf{E}^{\perp}, \quad (5.2b)$$

где $\hat{\mathbf{e}}$ есть оператор поворота в плоскости Oxy на угол $-\pi/2$,

$$\hat{\mathbf{e}} \mathbf{H}^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^x \\ H^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^y \\ -H^x \end{pmatrix}. \quad (5.2c)$$

Проекции векторных уравнений Максвелла на продольное направление суть

$$\operatorname{div}(\hat{\mathbf{e}} \mathbf{H}^{\perp}) = -i\varepsilon k E^z, \quad \operatorname{div}(\hat{\mathbf{e}} \mathbf{E}^{\perp}) = i\mu k H^z. \quad (5.2d)$$

Мощность P , передаваемая через всё сечение волновода в продольном направлении, определяется интегралом

$$P = \frac{c}{2\pi} \operatorname{Re} \int dx dy (\hat{\mathbf{e}} \mathbf{H}^{\perp*} \cdot \mathbf{E}^{\perp}). \quad (5.2e)$$

Отталкиваясь от этого равенства, определим скалярное произведение двух, вообще говоря комплексных, поперечных векторных полей $\hat{\mathbf{e}} \mathbf{H}^{\perp}$ и $\mathbf{E}^{\perp}$ следующим образом:

$$\text{scalar product : } \int dx dy (\hat{\mathbf{e}} \mathbf{H}^{\perp*} \cdot \mathbf{E}^{\perp}). \quad (5.2f)$$

5-1.1.1 Параметризация поля через поперечные компоненты

Покажем, как все компоненты поля могут быть параметризованы через поперечные компоненты магнитного поля $\mathbf{H}^{\perp}$. Для этого параметризуем сначала электромагнитное поле через вектор-потенциалом $\mathbf{A}$, имеющем ненулевыми только поперечные компоненты, $A^z = 0$. Тогда из определения

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (5.2g)$$

следует, что

$$\mathbf{A}^{\perp} = -\frac{i}{\beta} \hat{\mathbf{e}} \mathbf{H}^{\perp}, \quad H^z = \operatorname{div}(\hat{\mathbf{e}} \mathbf{A}^{\perp}) = \frac{i}{\beta} \operatorname{div} \mathbf{H}^{\perp}. \quad (5.2h)$$

Выражения для компонент электрического поля следуют из уравнений Максвелла (5.2b, 5.2d):

$$\mathbf{E}^\perp = \frac{\beta}{\varepsilon k} \hat{\mathbf{e}} \mathbf{H}^\perp - \frac{\hat{\mathbf{e}}}{\varepsilon k \beta} \nabla_\perp \operatorname{div} \mathbf{H}^\perp = \quad (5.2i)$$

$$= \frac{i\beta^2}{\varepsilon k} \mathbf{A}^\perp + \frac{i\hat{\mathbf{e}}}{\varepsilon k} \nabla_\perp \operatorname{div} (\hat{\mathbf{e}} \mathbf{A}^\perp),$$

$$E^z = \frac{i}{\varepsilon k} \operatorname{div} (\hat{\mathbf{e}} \mathbf{H}^\perp) = -\frac{\beta}{\varepsilon k} \operatorname{div} \mathbf{A}^\perp. \quad (5.2j)$$

5-1.1.2 Волновые уравнения для поперечных компонент поля

Волновые уравнения на электрическое и магнитное поля для среды, не обладающей магнитными свойствами, имеют вид

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \varepsilon k^2 \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \mathbf{H} = k^2 \mathbf{H}. \quad (5.2k)$$

Спроектируем волновые уравнения (5.2k) на поперечную плоскость:

$$\left((\Delta^\perp + \varepsilon k^2 - \beta^2) - \mathbf{g} \nabla_\perp^T \right) \hat{\mathbf{e}} \mathbf{H}^\perp = 0, \quad (5.2l)$$

$$\left((\Delta^\perp + \varepsilon k^2 - \beta^2) + \nabla_\perp \mathbf{g}^T \right) \mathbf{E}^\perp = 0, \quad (5.2m)$$

где логарифмический градиент диэлектрической проницаемости

$$\mathbf{g} = \nabla_\perp \ln \varepsilon, \quad (5.2n)$$

верхний индекс ‘ T ’ означает транспонирование (в данном случае переводящее вектор-столбец в вектор-строку), а производные действуют на всё, что стоит правее них. Важной характеристикой волновых уравнений (5.2l, 5.2m) является то, что в них не входят продольные компоненты полей. Поскольку же, как показано в пункте 5-1.1.1, все компоненты полей могут быть выражены через компоненты $\mathbf{H}^\perp$, то после того, как получено решение уравнения (5.2l), пространственная структура моды оказывается полностью определённой.

Дифференциальные операторы, фигурирующие в уравнениях (5.2l, 5.2m), переходят в друг друга при операции транспонирования в смысле скалярного произведения (5.2f). Если же рассматривать только среды без поглощения, то дифференциальные операторы в (5.2l, 5.2m) являются чисто действительными, и поэтому операция эрмитова сопряжения также переводит эти операторы друг в друга. Таким образом, поля моды № n $\mathbf{E}_n^\perp$ и $\hat{\mathbf{e}} \mathbf{H}_n^{\perp*}$, являющиеся решением этих уравнений при $\beta^2 = \beta_n^2$, оказываются левыми и правыми собственными векторами одного и того же оператора. Поскольку величину β^2 в этих уравнениях следует назвать собственным значением этого оператора, то поля разных мод ортогональны друг другу в смысле скалярного произведения (5.2f):

$$\int dx dy (\hat{\mathbf{e}} \mathbf{H}_m^{\perp*} \cdot \mathbf{E}_n^\perp) = \delta_{nm}. \quad (5.2o)$$

Мы нормировали амплитуды мод на фиксированную ‘единичную мощность’. Отметим, что возможно выбрать чисто действительными поля $\mathbf{E}_n^\perp$ и $\mathbf{H}_n^\perp$ (то есть множители при бегущей экспоненте (5.1b)) в силу действительности операторов в (5.2l, 5.2m), однако в дальнейшем такой выбор не предполагается реализованным.

5-1.1.3 Параметризация поля через продольные компоненты

Теперь, наоборот, выразим все поперечные компоненты электромагнитного поля через его продольные компоненты. По-прежнему считаем среду немагнитной. Путём выбора соответствующих линейных комбинаций (5.2a, 5.2b) приходим к уравнениям

$$\mathbf{H}^\perp = \frac{-i\beta \nabla_\perp H^z + i\varepsilon k \hat{\mathbf{e}} \nabla_\perp E^z}{\beta^2 - \varepsilon k^2}, \quad (5.2p)$$

$$\mathbf{E}^\perp = -\frac{ik \hat{\mathbf{e}} \nabla_\perp H^z + i\beta \nabla_\perp E^z}{\beta^2 - \varepsilon k^2}. \quad (5.2q)$$

Теперь, подставляя (5.2p, 5.2q) в скалярные уравнения Максвелла (5.2d), получаем систему волновых уравнений на E^z , H^z :

$$\begin{aligned} (\Delta^\perp - \beta^2 + \varepsilon k^2) E^z &= \frac{\beta^2 (\nabla_\perp \varepsilon \cdot (\nabla_\perp E^z + \hat{\mathbf{e}} \nabla_\perp H^z))}{\varepsilon (\varepsilon k^2 - \beta^2)}, \\ (\Delta^\perp - \beta^2 + \varepsilon k^2) H^z &= \frac{k (\nabla_\perp \varepsilon \cdot (k \nabla_\perp H^z + \beta \hat{\mathbf{e}} \nabla_\perp E^z))}{\varepsilon k^2 - \beta^2}. \end{aligned} \quad (5.2r)$$

5-1.2 Интегральные соотношения между полями

Используя t - и z -зависимости для монохроматической волны, получаем, что в усреднённой форме это уравнение записывается в виде

$$\beta \int dx dy \begin{pmatrix} -E^y \\ E^x \end{pmatrix} = k \int dx dy \begin{pmatrix} B^x \\ B^y \end{pmatrix}. \quad (5.3a)$$

Краткая запись этого уравнения следующая:

$$n_{\text{eff}} \hat{\mathbf{e}} \langle \mathbf{E}^\perp \rangle = \langle \mathbf{B}^\perp \rangle, \quad n_{\text{eff}} = \frac{\beta}{k}, \quad (5.3b)$$

сравни с (3.3e), где угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по поперечной плоскости Oxy . Аналогичным способом из уравнения на магнитное поле $\mathbf{H}$ получаем

$$n_{\text{eff}} \hat{\mathbf{e}} \langle \mathbf{H}^\perp \rangle = \langle \mathbf{D}^\perp \rangle. \quad (5.3c)$$

Если все среды, из которых изготовлен волновод, немагнитные, то $\mathbf{H} = \mathbf{B}$, а импеданс $Z = \langle \mathbf{E} \rangle / \langle \mathbf{H} \rangle = 1/n_{\text{eff}}$.

§5-2. Задачи

• **Задача 1:** Рассмотрите работу дифракционной решётки с узким спектром отражения в волноводе. Дифракционная решётка представляет собой слабую периодическую модуляцию диэлектрической проницаемости, так что в области $0 < z < L$

$$\varepsilon = \varepsilon_0(x, y) + \delta\varepsilon(x, y) \sin(2pz)$$

с $\delta\varepsilon \ll 1$, где $2\pi/p$ — период модуляции решётки. Эффективным уравнением на распространение моды на фоне дифракционной решётки является

$$(\partial_z^2 + q^2)E = 0, \quad q^2(z) = \beta^2(1 + \epsilon \sin(2pz)) \quad (5.4a)$$

с безразмерным параметром $\epsilon \ll 1$, принимающим постоянное значение в области $0 < z < L$. Положим,

что сигнал налетает на дифракционную решётку слева. Найдите коэффициент отражения r сигнала на частоте ω , считая, что $\beta(\omega)$ близко к p . *Указание:* Перейдите от электрического поля E к полям

$$\Psi_{\pm} = \frac{E \mp i\partial_z E/q}{2},$$

описывающим распространяющиеся вправо и влево волны. Получите систему линейных дифференциальных уравнений на поля $\Psi_{\pm}$. Затем сделайте разложение по малому параметру ϵ , удержите только резонансные члены и получите замкнутое уравнение второго порядка на амплитуду распространяющейся вправо волны Ψ_+ .

§5-3. Волноводы с металлическими стенками

Рассмотрим прямой волновод с металлическими стенками. Поперечное сечение такого волновода представляет собой некоторую фигуру с металлической границей. Предполагается, что в главном приближении металл можно считать идеальным, то есть поле не проникает вглубь металла.

Может быть два принципиально разных с точки зрения свойств передачи сигнала по волноводу варианта — односвязная и многосвязная граница. Примером волновода с односвязной границей является металлическая труба круглого или квадратного сечения с поперечным размером a внутренней области. В таком волноводe могут распространяться только волны с частотой ω выше частоты отсечки, $\omega \gtrsim c/a$. Это доставляет неудобство в электротехнике, поскольку при использовании сигналов с несущей частотой $1 \div 10^3$ МГц поперечные размеры волновода должны быть неразумно большими — от 10 см до 100 м.

Решение этой проблемы достигается путём использования волноводов с двусвязным поперечным сечением металлической границы (всякое многосвязное сечение даёт нужный результат, но двусвязное технически наиболее простое). Примерами волноводов с двусвязным сечением являются i) коаксиальный кабель — металлическая трубка, называемая также обмоткой или внешней жилой, внутри которой расположен провод, называемой внутренней жилой, и ii) параллельно идущие два провода. Преимуществом таких волноводов проистекает из возможности возбуждения ТЕМ-мод, поле которых, будучи спроектировано на поперечный срез, создаёт разность потенциалов между двумя жилами. В волноводe с односвязной границей такого быть не может. В ТЕМ-модах электромагнитное поле является полностью поперечным, их закон дисперсии совпадает с законом дисперсии плоских волн в неограниченном пространстве. Частоты отсечки у ТЕМ-мод потоку нет. Волноводы с многосвязной границей рассмотрены в Пункте 5-3.3, а затем более подробно работа двужильных волноводов разобраны в § 5-4.

5-3.1 Волноводы с односвязным поперечным сечением

В этом пункте мы предполагаем, что фигура поперечного сечения волновода не имеет полостей, т.е. является односвязной. В качестве примера можно представить себе металлическую трубу, в таком случае волноводная область находится внутри трубы. Предположим для простоты изложения, что волноводная область заполнена пустотой.

Сперва мы будем считать металл идеальным, так что на его поверхности выполняются граничные условия (4.5p). Тогда потери отсутствуют и постоянная рас-

пространения β (5.1b) является действительной величиной.

В таких волноводах, как мы убедимся ниже, все моды делятся на ТЕ-моды и ТМ-моды, в которых равны нулю z -компоненты соответственно электрического и магнитного поля. В любой моде каждая компонента поля удовлетворяет волновому уравнению (5.2l, 5.2m) с $g = 0$:

$$(\Delta^\perp - \beta^2 + k^2) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (5.5)$$

На границе идеального металла Γ должны быть равны нулю две касательные компоненты электрического поля и нормальная компонента магнитного поля.

5-3.1.1 ТМ-моды

Рассмотрим ТМ-моду. Волновое уравнение (5.5) на z -компоненту электрического поля есть

$$\Delta^\perp E^z = (k^2 - \beta^2) E^z, \quad E^z|_\Gamma = 0. \quad (5.6a)$$

На границе компонента E^z , будучи касательной по отношению к поверхности металла компонентой электрического поля, должна обращаться в нуль. Вместе с этим граничным условием, уравнение (5.6a) есть уравнение на структуру моды, задающее её дисперсию $\beta(\omega)$. Математически это уравнение эквивалентно квантовомеханической задаче о нерелятивистской массивной частице, помещённой в двумерную потенциальную яму с плоским дном и бесконечно высокими стенками, имеющую форму поперечного сечения волновода.

Выразим остальные компоненты электромагнитного поля через E^z . Из z -компоненты уравнения на индукцию магнитного поля (5.2d) с $H^z = 0$ заключаем, что электрическое поле в поперечной плоскости потенциально,

$$\partial_x E^y - \partial_y E^x = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}^\perp = -\partial_\alpha \varphi. \quad (5.6b)$$

(Подчеркнём здесь, что электрическое поле, будучи рассмотренным во всём трёхмерном пространстве, не потенциально, как и в любой волне.) Условие на бездивергентность электрического поля даёт связь между z -компонентой электрического поля и потенциалом φ :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta^\perp \varphi = -i\beta E^z. \quad (5.6c)$$

На поверхности металла касательное электрическое поле отсутствует, поэтому граничным условием для потенциала является $\varphi|_\Gamma = \varphi_0 \exp(i\beta z)$. Константу φ_0 можно положить равной нулю, поскольку в односвязной области у уравнения $\Delta^\perp \varphi = 0$ с такими граничными условиями не существует нетривиального (отличного от $\varphi = \varphi_0 \exp(i\beta z)$) решения. Это означает, что потенциал

φ удовлетворяет тому же волновому уравнению (5.6a), и в силу (5.6c)

$$\varphi = \frac{i\beta}{k^2 - \beta^2} E^z. \quad (5.6d)$$

Наконец, уравнение на α -компоненты электрической индукции даёт

$$H^\alpha = \frac{k}{\beta} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi. \quad (5.6e)$$

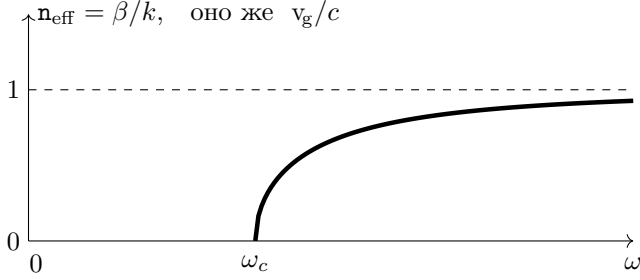


Рис. 5.1 Закон дисперсии моды в волноводе с металлическими стенками, построенный в координатах ω , n_{eff} .

Вернёмся теперь к волновому уравнению (5.6a). При фиксированной геометрии поперечного сечения функция $E^z(x, y)$ является собственной функцией оператора Лапласа $\Delta^\perp$, так что независимо от значения частоты волны

$$\Delta^\perp E_n^z = -\frac{\omega_{c,n}^2}{c^2} E_n^z, \quad E_n^z|_\Gamma = 0, \quad (5.6f)$$

где $\omega_{c,n}$ есть некоторая константа, а n — номер волновой моды (ниже там, где это не принципиально, мы будем опускать индекс ' n ' для компактности формул). Поскольку потенциал φ также удовлетворяет волновому уравнению (5.5), комбинация уравнений (5.6c, 5.6f) позволяет заменить потенциал φ в (5.6b, 5.6e) компонентой поля E^z :

$$E^\alpha = -\frac{i\beta}{(\omega_c/c)^2} \partial_\alpha E^z, \quad H^\alpha = \frac{ik}{(\omega_c/c)^2} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta E^z. \quad (5.6g)$$

Существует бесконечное счётное количество решений (5.6f), так что $n \geq 0$ в (5.6f). Эти решения характеризуются в общем случае разными собственными значениями, то есть разными $\omega_{c,n}$. Закон дисперсии моды Nn есть

$$\beta_n^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{c,n}^2}{c^2}. \quad (5.6h)$$

При частоте $\omega < \omega_{c,n}$ мода Nn не распространяется по волноводу. Частота $\omega_{c,n}$ называется частотой отсечки (*cutoff frequency*) для данной моды. Закон дисперсии (5.6h) в разных координатах изображён на Рисунках 5.1, 5.2. В волноводах рассматриваемого типа все моды имеют ненулевую частоту отсечки. Среди частот отсечки есть минимальная $\omega_{c,1}$. Если характерный размер поперечного сечения равен a , то оценка для самой низкой частоты отсечки есть $\omega_{c,1} \sim c/a$.

Групповая скорость для моды Nn есть

$$v_{g,n} = \frac{d\omega}{d\beta_n} = \frac{\beta_n}{k} c = \frac{c^2}{v_{ph,n}}, \quad v_{ph,n} = \frac{\omega}{\beta_n}, \quad (5.6i)$$

то есть соотношение групповой скорости $v_{g,n}$ и фазовой скорости $v_{ph,n}$ лежит на границе теоретически допустимого значения, см. (3.13d).

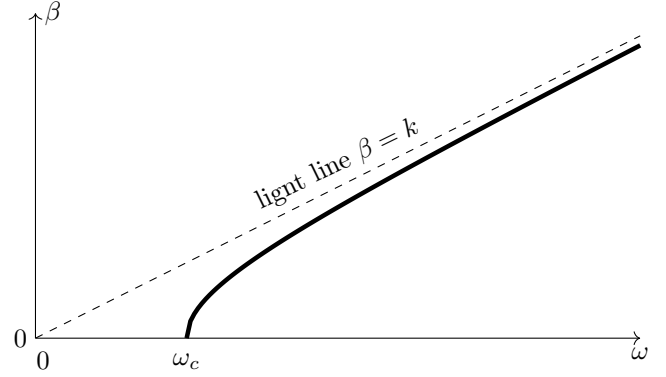


Рис. 5.2 Закон дисперсии моды в волноводе с металлическими стенками, построенный в координатах ω , β .

Дадим общие характеристики структуре моды, считая её номер не очень большим. Сперва заметим, что производные в поперечных направлениях ∂_α должны оцениваться как c/ω_c .

В области слабого превышения частоты отсечки $\omega - \omega_c \ll \omega_c$ постоянная распространения (5.6h), а вместе с ней групповая скорость, малы, $\beta/k = v_g/c \ll 1$. Поэтому в (5.6g) справедливы оценки $E^\perp \sim (\beta/k) E^z \ll E^z$, т.е. электрическое поле почти продольно, а магнитное поле по амплитуде совпадает с электрическим, $H^\perp \sim E^z$.

В области высоких частот $\omega \gg \omega_c$ эффективный коэффициент преломления почти равен единице, $\beta \approx k$. Волна становится практически поперечной, $E^\perp \approx V^\perp \sim (\omega/\omega_c) E^z$, её пространственная структура близка к структуре плоской волны.

5-3.1.2 ТЕ-моды

В ТЕ-волне компонента $E^z = 0$, поэтому поперечная часть магнитного поля потенциальна в силу (5.2d) с потенциалом, пропорциональным H^z . Аналогом выражений (5.6g) для поперечных компонент поля являются

$$H^\alpha = -\frac{i\beta}{(\omega_{c,n}/c)^2} \partial_\alpha H^z, \quad E^\alpha = -\frac{ik}{(\omega_{c,n}/c)^2} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta H^z. \quad (5.7a)$$

В уравнении (5.6f) на частоты отсечки надо заменить граничные условия в соответствии с (4.5p):

$$\Delta^\perp H_n^z = -\frac{\omega_{c,n}^2}{c^2} H_n^z, \quad \partial_n H^z|_\Gamma = 0. \quad (5.7b)$$

Вместо равенства нулю поля в (5.6f), теперь в (5.7b) мы имеем равенство нулю производной поля по нормали. В

результате мы приходим к формально тому же закону дисперсии (5.6h), но с другими частотами отсечки.

Пространственная структура ТЕ-мод аналогична пространственной структуре ТМ-мод, описанной в предыдущем пункте, в котором надо поменять местами электрическое и магнитное поля, $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$.

5-3.2 Потери в волноводах

Учтём конечные потери на стенках металла, происходящие вследствие конечности его поверхностного импеданса ζ . Вследствие потерь длина распространения ℓ каждой моды (на этой длине интенсивность падает в e раз) становится конечной. Пусть P — мощность, передаваемая вдоль волновода (размерность эрг/с), $\mathcal{E}$ (размерность эрг/см) — погонная плотность энергии, запасённая в моде, а Q — погонная плотность потерь, выделяющихся в виде тепла в металле (размерность эрг/(с · см)). Мощность есть результат переноса энергии с групповой скоростью, $P = v_g \mathcal{E}$. Длина распространения

$$\ell = \frac{P}{Q} = \frac{v_g \mathcal{E}}{Q}. \quad (5.8a)$$

Передаваемая мощность P есть интеграл от потока энергии (3.33c) вдоль волновода по его поперечному сечению,

$$P = \frac{c}{2\pi} \int dxdy \operatorname{Re}[\mathbf{E}^\perp \times \mathbf{H}^{\perp*}]^z. \quad (5.8b)$$

Погонная мощность потерь есть интеграл от потока энергии в металл (4.5f) по краю поперечного сечения волновода,

$$Q = \frac{\zeta' c}{2\pi} \oint_\Gamma dr |\mathbf{H}_t|^2. \quad (5.8c)$$

Преобразуем эти общие выражения отдельно для ТМ- и ТЕ-мод.

Для ТМ-мод удобно воспользоваться (5.6g)

$$\begin{aligned} P &= \frac{c}{2\pi} \frac{k}{\beta} \int dxdy |\mathbf{E}^\perp|^2 = \\ &= \frac{c^2 \omega \beta}{2\pi \omega_c^2} \int dxdy |E^z|^2, \end{aligned} \quad (5.8d)$$

$$Q = \frac{\zeta' c^3 \omega^2}{2\pi \omega_c^4} \oint dr |\partial_n E^z|^2, \quad (5.8e)$$

где ∂_n — производная по нормали к поверхности металла. При выводе (5.8d) мы сначала воспользовались тем, что поперечные электрическое и магнитное поля ортогональны друг другу, и выразили $\mathbf{E}^\perp$ через $\nabla_\perp E^z$, см. (5.6g), а затем проинтегрировали по частям, учтя уравнение на собственные моды (5.6f). Оценка для длины распространения может быть получена из первого выражения для P в (5.8d):

$$\ell \sim \frac{v_g a}{c \zeta'}, \quad (5.8f)$$

где $a = c/\omega_c$ есть характерный размер поперечного сечения волновода, а v_g — групповая скорость (5.6i). Фактор v_g/c становится малым по сравнению с единицей в области слабого превышения частоты отсечки, когда $\omega - \omega_c \ll \omega_c$. Коэффициент пропорциональности в (5.8f) определяется пространственной структурой моды.

Для ТЕ-мод, по аналогии с (5.8e), связь (5.7a) даёт для потока энергии

$$\begin{aligned} P &= \frac{c}{2\pi} \frac{\beta}{\omega_c} \int dxdy |\mathbf{E}^\perp|^2 = \frac{c}{2\pi} \frac{k}{\beta} \int dxdy |\mathbf{H}^\perp|^2 = \\ &= \frac{c^2 \omega \beta}{2\pi \omega_c^2} \int dxdy |\mathbf{H}^z|^2, \end{aligned} \quad (5.8g)$$

где опять была использована ортогональность друг другу поперечных электрического и магнитного полей, см. (5.7a), и дисперсионное уравнение (5.7b). При вычислении же потерь надо учесть также и продольную z -компоненту магнитного поля, так что получим

$$Q = \frac{\zeta' c}{2\pi} \oint dr \left(|\mathbf{H}^z|^2 + \frac{c^4 \beta^2}{\omega_c^4} |\partial_\tau \mathbf{H}^z|^2 \right), \quad (5.8h)$$

где $\partial_\tau \mathbf{H}^z$ — производная $\mathbf{H}^z$ -компоненты на поверхности металла вдоль касательной, лежащей в поперечной плоскости Oxy .

Оценка (5.8f) для длины распространения верна и для ТЕ-мод. В области слабого превышения частоты обрезки в потерях (5.8h) главным является первое слагаемое, т.е. вклад от продольной компоненты магнитного поля. В области же высоких частот, наоборот, главных является второй вклад, производимый поперечной частью магнитного поля.

5-3.3 Волноводы с неодносвязным поперечным сечением

Рассмотрим волновод с металлическими стенками, у которого поперечное сечение не является односвязным. Примером такого волновода является металлическая полая трубка, в которую помещён металлический цилиндр меньшего радиуса. Сечение такого волновода является двусвязной фигурой: граница этой фигуры состоит из двух замкнутых несвязанных друг с другом линий. Гибкие кабели, выполненные по этой схеме, называют коаксиальными.

В общем случае у волновода может быть N несвязанных друг с другом частей металлической поверхности. В волноводах такого типа помимо ТЕ- и ТМ-мод есть ещё $N - 1$ штук ТЕМ-мод. Дисперсия этих мод совпадает (в пределе идеального металла) с дисперсией электромагнитных волн в пустоте, и эти моды не имеют частоты отсечки. Отсутствие частоты отсечки делает ТЕМ-моды весьма привлекательными для использования в электротехнике, поскольку позволяет передавать сигнал на частотах, соответствующих длинам волн, значительно превышающим размер поперечного сечения волновода.

Покажем, что *ТЕМ*-моды действительно существуют и разберём из свойства. Название этих мод предполагает, что в них и электрическое и магнитное поля являются чисто поперечными, то есть $E^z = 0$, $H^z = 0$. Тогда электрическое поле является потенциальным в поперечной плоскости, см. (5.6b). Потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа,

$$\Delta^\perp \varphi = 0. \quad (5.9a)$$

сравни с (5.6c). От случая односвязной волноведущей полости сейчас нас отличает то, что теперь существует $N > 1$ участков поверхности металла Γ_α , $\alpha = \{0, N-1\}$, не связанных между собой. Вдоль каждого участка границы Γ_α значение потенциала должно быть постоянным, но от участка к участку это значение может меняться:

$$\varphi|_{\Gamma_\alpha} = \varphi_\alpha. \quad (5.9b)$$

В результате у уравнения Лапласа (5.9a) на потенциал существует $N - 1$ нетривиальное решение.

Закон дисперсии *ТЕМ*-мод можно найти, используя (5.9a) в уравнении (5.5), написанном для E^α . Получаем, что

$$\beta = k = \frac{\omega}{c}. \quad (5.9c)$$

Магнитное поле теперь найдём как частный случай (5.6e):

$$H^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi. \quad (5.9d)$$

В следующем § 5-4 разбирается волновод с $N = 2$ металлическими границами, представляющий собой отдельный интерес в связи с использованием в электротехнике.

5-3.4 Задачи

5-3.4.1 Волноводы с прямоугольным поперечным сечением

Пусть поперечное сечение волновода представляет собой прямоугольник со сторонами $a \leq b$. Направим ось Ox по стороне a , а ось Oy , соответственно, по стороне b ; начало координат находится в одном из углов сечения.

В ТМ-волнах E^z -компонента имеет вид

$$E^z = \sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi my}{b}\right), \quad (5.10a)$$

где целые n, m должны быть не меньше единицы, $n, m \geq 1$. В ТЕ-волнах H^z -компонента имеет вид

$$H^z = \cos\left(\frac{\pi nx}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi my}{b}\right), \quad (5.10b)$$

где сумма неотрицательных целых n, m должна быть не меньше единицы, $n + m \geq 1$.

5-3.4.2 Волноводы с круглым поперечным сечением

• **Задача 1:** Найти возможные типы волн в круглом волноводе радиуса a , считая его стенки идеально проводящими. Определить граничную частоту ω_0 для такого волновода. Найти коэффициенты затухания α разных типов волн в случае, если поверхностный импеданс стенок равен ζ . *Литература:* Пункт 5-3.4.2, а также [Топтыгин, 2005, стр. 628, задачи 14.12 и 14.13].

Решение: Уравнение (5.6f) на ТМ-моды в цилиндрических координатах имеет вид уравнения Бесселя

$$\left(r^2 \partial_r^2 + r \partial_r - \nu^2 + \frac{(\omega_c r)^2}{c^2}\right) E^z = 0, \quad E^z = 0. \quad (5.10c)$$

Решением этого уравнения является

$$E^z = J_\nu(\omega_c r/c), \quad J_\nu(\omega_c a/c) = 0, \quad (5.10d)$$

$$i.e. \quad \omega_c a/c = z.$$

Таким образом, моды классифицируются двумя числами — аксиальным числом ν и номером корня во втором уравнении (5.10d). Чем выше номер корня, тем выше частота отсечки соответствующей моды. Согласно (5.8d, 5.8e), длина распространения (5.8a) равна

$$\ell = \frac{(\beta/k)a \int_0^z \epsilon \, d\epsilon \, J_\nu^2(\epsilon)}{\zeta' z^2 (J'_\nu(z))^2} = \frac{\beta a}{2\zeta' k}. \quad (5.10e)$$

Упрощение в (5.10e) произведено следующим образом. Из граничного условия (5.10d) и рекуррентных соотношений (5.28g) следует, что производная в знаменателе (5.10e)

$$J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) = -J_{\nu+1}(z).$$

Для преобразования интеграла в числителе (5.10e) мы также воспользовались рекуррентным соотношением (5.28g) для функций Бесселя и граничным условием (5.10d).

Теперь перейдём к ТЕ-модам. Для них аналогом уравнения (5.10c) является

$$\left(r^2 \partial_r^2 + r \partial_r - \nu^2 + \frac{(\omega_c r)^2}{c^2}\right) H^z = 0, \quad \partial_r H^z = 0. \quad (5.10f)$$

Поэтому поле моды есть

$$H^z = J_\nu(\omega_c r/c), \quad J'_\nu(\omega_c a/c) = 0. \quad (5.10g)$$

$$i.e. \quad \omega_c a/c = z.$$

Согласно (5.8g, 5.8h), длина распространения (5.8a) рав-

на

$$\ell = \left(1 + \frac{\nu^2 \beta^2 a^2}{z^4}\right)^{-1} \frac{\beta k a^3 \int_0^z \varepsilon d\varepsilon J_\nu^2(\varepsilon)}{\zeta' z^4 J_\nu^2(z)} = \quad (5.10h)$$

$$= \frac{(z^2 - \nu^2)(ka)^2(\beta/k)a}{z^4 + (\nu\beta a)^2} \frac{1}{2\zeta'}.$$

Мы снова воспользовались рекуррентным соотношением (5.28g) для функций Бесселя для преобразования интеграла в числителе и учли граничное условие (5.10g), которое даёт равенства

$$\frac{\nu}{z} J_\nu(z) = J_{\nu+1}(z) = J_{\nu-1}(z). \quad (5.10i)$$

Отметим, что множитель β/k в (5.10e, 5.10h) соответствует множителю v_g/c в сделанной нами ранее оценке (5.8f) для длины распространения.

• **Задача 2:** Исследовать ТЕ- и ТМ-моды, имеющие наиболее низкие частоты отсечки в волновод с круглым поперечным сечением радиуса a , считая его стенки идеально проводящими. **а)** Определить частоты отсечки ω_c для этих мод. Нарисовать пространственную структуру проекции электрического и магнитного полей на поперечную плоскость. **б)** Найти длины распространения ℓ для каждой из этих мод (численное выражение для коэффициента перед a/ζ'), если поверхностный импеданс стенок равен $\zeta \ll 1$, а частоты сигналов в каждой из мод в $\alpha = 2$ раза больше соответствующей частоты отсечки. *Литература:* Пункт 5-3.4.2.

Решение: Приведём сперва графики первых двух функций Бесселя первого рода, которые описывают радиальную структуру аксиально-симметричной моды и моды с аксиальным числом $\nu = 1$.

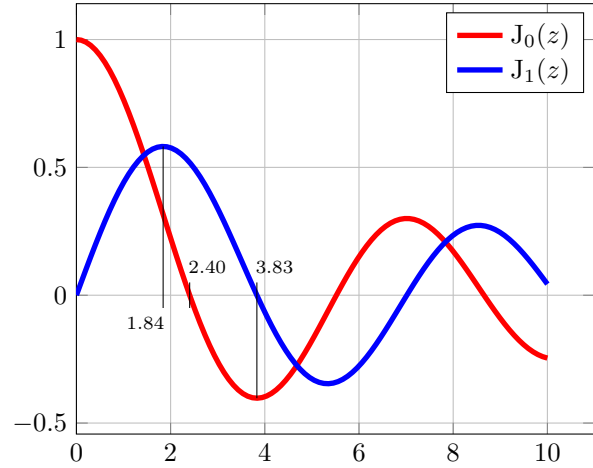


Рис. 5.3 Графики функций Бесселя $J_0(z)$ и $J_1(z) = -\partial_z J_0(z)$.

• **Задача 3:** Дан волновод со стенками из меди, имеющий круговое поперечное сечение радиуса 50 см. Проводимость меди равна $\sigma = 580 \text{ ксим/см} = 5.2 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$. Частота сигнала в 1.1 раза больше, чем минимальная частота отсечки в этом волновод. Рассчитайте длину распространения электромагнитной волны, полагая, что на этой частоте скин-эффект нормален.

§5-4. Работа двухпроводных линий (линий Лехера) в электрических цепях

Рассмотрим распространение электромагнитной волны по тонкому волноводу, в котором, несмотря на его тонкость, хорошо локализовано электромагнитное поле. Общий принцип локализации поля состоит в существовании более чем одной металлической жилы в волновод, см. Пункт 5-3.3. При этом глубина скин-слоя в металле должна быть мала по сравнению с толщиной сечения самих металлических элементов и с расстоянием между ними. Такие волноводы называются также *линиями Лехера (Lecher line)*. Будем считать, что пространство между металлическими жилами заполнено средой с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной восприимчивостью μ .

Примерами такого сорта волноводов являются коаксиальный кабель и два параллельных близко расположенных металлических провода; для определённости мы будем ниже иметь ввиду именно эти два случая. Мы работаем в обозначениях § 5-1.

В главном приближении металл можно считать иде-

альным. Тогда, согласно Пункту 5-3.3, электрическое поле является чисто поперечным и потенциальным в плоскости Oxy , причём потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа в поперечной плоскости,

$$E^\alpha = -\partial_\alpha \varphi, \quad \Delta^\perp \varphi = 0, \quad E^z = 0, \quad (5.11a)$$

см. (5.6b, 5.9a). Магнитное поле также поперечно, его компоненты равны (см. (5.9d))

$$B^\alpha = \mathbf{n} \epsilon^{\alpha\gamma} \partial_\gamma \varphi = -\mathbf{n} \epsilon^{\alpha\gamma} E^\gamma, \quad H^\alpha = -\frac{1}{\zeta} \epsilon^{\alpha\gamma} E^\gamma, \quad (5.11b)$$

где $\mathbf{n} = \sqrt{\varepsilon\mu}$ и $\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ — показатель преломления и импеданс среды (3.3e).

Задачей этого параграфа является переписать волновые уравнения в двухпроводных линиях в терминах электрических цепей, тем самым упростив описание подключения к таким линиям полезных нагрузок.

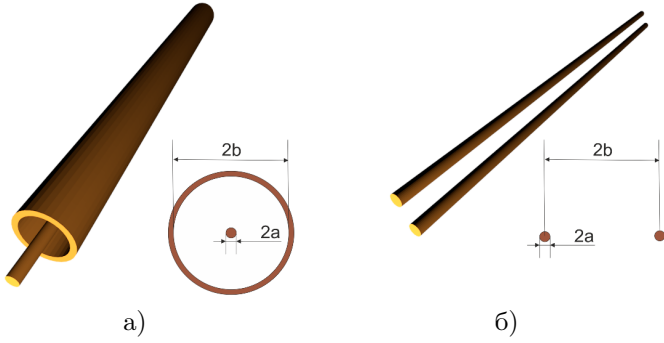


Рис. 5.4 а) коаксиальный волновод; б) двух-проводная линия

Пусть $\rho_1 = \rho$ — погонная плотность заряда на одном из проводов волновода, тогда на втором проводе погонная плотность заряда будет $\rho_0 = -\rho$. В приближении идеального металла это соотношение точное для ТЕМ-волны. Также введём ток J , текущий по проводу №1; по проводу №0 течёт ток $-J$.

Теперь установим связь между электромагнитным полем в волноводе и величинами ρ, J . Поскольку провода волновода металлические, то их поверхности в поперечном направлении являются изопотенциальными. Разность потенциалов V между жилами

$$V(z) = \int_0^1 (d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) = \varphi|_{\Gamma_1} - \varphi|_{\Gamma_0}, \quad (5.11c)$$

где интегрирование производится от точки '0' на втором волноводе до точки '1'; в силу потенциальности поля не имеет значения конкретное положение точек и форма пути интегрирования. Искомая связь зависит от геометрии и диэлектрической проницаемости среды волновода через погонную ёмкость C , $[C] = 1$,

$$\rho = CV.$$

Ёмкость C может быть вычислена через законы электростатики в двумерном случае.

Аналогичным образом введём в рассмотрение погонную плотность потока магнитного поля

$$\Phi = \int_0^1 (d\mathbf{r} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{e}_z]), \quad (5.11d)$$

где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор, направленный вдоль волновода. Этот поток создаётся током J . Таким образом,

$$\Phi = \frac{LJ}{c}, \quad (5.11e)$$

где L — погонная индуктивность, размерность $[L] = 1$. Погонная индуктивность также может быть вычислена по известным геометрическим параметрам волновода исходя из закона Био-Савара-Лапласа.

Наконец, установим уравнения, определяющие распространения волн. Первое уравнение следует из закона сохранения заряда,

$$\partial_x J = -\partial_t \rho. \quad (5.11f)$$

Второе уравнение можно получить, домножив уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} \quad (5.11g)$$

векторно (слева) на $\mathbf{e}_z$, и затем проинтегрировав проекцию результата на $d\mathbf{r}$ по контуру '0-1'. В результате получим

$$\frac{1}{c} \partial_t \Phi = E_z \Big|_0^1 - \int_0^1 (d\mathbf{r} \cdot \partial_z \mathbf{E}) = -\partial_z V, \quad (5.11h)$$

где в последнем приближении мы опустили вклад продольного электрического поля (оно не равно нулю, если металл не идеальный). В итоге приходим к системе уравнений, связывающих напряжение и ток:

$$\begin{aligned} \partial_z J &= -\partial_t \rho = -C \partial_t V, \\ \partial_z V &= -\frac{1}{c} \partial_t \Phi = -\frac{L}{c^2} \partial_t J. \end{aligned} \quad (5.11i)$$

Для монохроматической волны, для которой $\rho \propto \exp(i\beta z - i\omega t)$, закон дисперсии

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} LC. \quad (5.11j)$$

Произведение

$$LC = \varepsilon \mu = n^2, \quad (5.11k)$$

поскольку внутри волновода мы имеем дело с плоской волной, для которой соотношение (5.11j) имеет вид (3.2f) (для цилиндрической геометрии см. явные вычисления погонных ёмкости (2.7c) и индуктивности (6.2c)). Итак,

$$\beta = n \frac{\omega}{c}. \quad (5.11l)$$

Отношение среднего значения электрического поля и магнитной индукции в монохроматической волне определяется показателем преломления

$$\frac{E}{B} = \frac{V}{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{n}, \quad (5.11m)$$

причём последнее равенство справедливо для любого волновода. Отношение напряжения и тока в бегущей вправо (в сторону больших z) есть

$$\frac{V}{J} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{n}{cC} \equiv Z_{\text{line}}. \quad (5.11n)$$

Введённое Z_{line} , $[Z_{\text{line}}] = \text{Ом}$ в системе единиц СИ, называется *волновым сопротивлением линии*. Для монохроматической волны с частотой ω система уравнений

(5.11i) в терминах введённых переменных V , J и параметров β , Z_{line} приобретает вид

$$\partial_z \begin{pmatrix} V \\ Z_{\text{line}} J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\beta \\ i\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ Z_{\text{line}} J \end{pmatrix}. \quad (5.11o)$$

Поток энергии W , передаваемый монохроматической волной может быть записан в виде (5.8e). Используя теорему Остроградского-Гаусса и уравнение Лапласа (5.11a), переишем его в виде интеграла по поверхности:

$$W = \frac{\omega}{8\pi\beta} \int dx dy |\nabla_{\perp} \varphi|^2 = -\frac{c}{8\pi n} \oint_{\Gamma} dr \operatorname{Re}(\varphi E_n^*), \quad (5.11p)$$

где нормаль предполагается направленной внутрь металла. В силу теоремы Гаусса поток электрического поля равен погонной плотности заряда,

$$\oint_{\Gamma_0} dr E_n = 4\pi\rho, \quad \oint_{\Gamma_1} dr E_n = -4\pi\rho. \quad (5.11q)$$

Потенциал на каждой из поверхностей постоянен, а его разность равна напряжению V (5.11c). Поэтому мощность

$$W = \frac{c \operatorname{Re}(V\rho^*)}{2n} = \frac{cC|V|^2}{2n} = \frac{|V|^2}{2Z_{\text{line}}}, \quad (5.11r)$$

где в последнем равенстве мы воспользовались (5.11n).

5-4.1 Подключение нагрузки

Рассмотрим работу двухпроводной линии на частоте ω с волновым сопротивлением Z_{line} , длиной l ; постоянная распространения волны на данной частоте равна β . На конце линии подключена некоторая нагрузка, обладающая импедансом Z_L . Из уравнения (5.11o) следует, что линия передачи задаёт линейную связь

$$\begin{pmatrix} U_L \\ Z_{\text{line}} I_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta l) & i \sin(\beta l) \\ i \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ Z_{\text{line}} I \end{pmatrix}$$

между входной (U, I) и выходной (U_L, I_L) парами напряжения и тока.

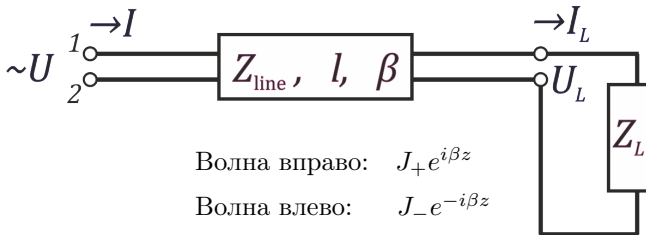


Рис. 5.5 Линия с нагрузкой на выходе.

Если на выходе известна величина импеданса Z_L нагрузки, $U_L/I_L = Z_L$, то для входных величин величина импеданса равна

$$\frac{U}{I} = \frac{Z_L - iZ_{\text{line}} \tan(\beta l)}{Z_{\text{line}} - iZ_L \tan(\beta l)} Z_{\text{line}}.$$

Предположим, что в линии потерь нет, так что её импеданс Z_{line} является чисто действительным, а нагрузка чисто реактивная, так что Z_L также чисто действительное. В этом случае мощность $W = \operatorname{Re}(UI^*)/2$, поставляется в начало линии, полностью выделяется на ‘полезной’ нагрузке Z_L . Предположим, что наша задача состоит в доставке до полезной нагрузки фиксированного значения мощности W . Определим необходимую величину амплитуды напряжения U для достижения этой цели. В результате вычислений получаем:

$$|U|^2 = 2 \frac{Z_L^2 \cos^2(\beta l) + Z_{\text{line}}^2 \sin^2(\beta l)}{Z_L} W.$$

Таким образом, напряжение не сильно флуктуирует с изменением длины линии, если волновое сопротивление линии не сильно отличается от сопротивления нагрузки, $Z_{\text{line}} \approx Z_L$; в этом случае говорят, что сопротивление линии согласовано с сопротивлением нагрузки. В противном случае амплитуда напряжения при фиксированной передаваемой мощности резко изменяется при вариации длины на $\delta l = \pi/(2\beta)$.

Представим теперь распределение тока (напряжения) в линии как совокупность двух волн, распространяющихся вправо и влево соответственно:

$$J(t, z) = (J_+ e^{i\beta z} + J_- e^{-i\beta z}) e^{-i\omega t},$$

где z – координата вдоль линии, отсчитываемая от положения полезной нагрузки Z_L ; введённые выше входной ток I и ток на нагрузке I_L равны соответственно $I = J_+ + J_-$ и $I_L = J_+ e^{i\beta l} + J_- e^{-i\beta l}$. Если известна амплитуда падающей волны, J_+ (т.е. мощность, передаваемая в сторону нагрузки, равна $W = |J_+|^2 \operatorname{Re} Z_{\text{line}}/2$), то напряжение U_L на нагрузке и амплитуда обратной волны J_- равны

$$U_L = \frac{2Z_L}{Z_{\text{line}} + Z_L} Z_{\text{line}} J_+, \quad J_- = \frac{Z_{\text{line}} - Z_L}{Z_{\text{line}} + Z_L} J_+. \quad (5.12)$$

Если $Z_{\text{line}} = Z_L$, то есть волновое сопротивление линии точно согласовано с сопротивлением нагрузки, то амплитуда отражённой волны J_- равна нулю: вся подводимая мощность в полезной нагрузке на ней и выделяется. В противном случае, когда не достигнуто согласование, амплитуда отражённой волны оказывается порядка амплитуды падающей, $|J_-| \sim |J_+|$, так что большая часть подводимой к нагрузке мощности отражается обратно.

5-4.2 Потери в линии из-за конечной проводимости металла

Найдём длину распространения сигнала (5.8a) вдоль линии при конечных потерях в металле. Поскольку z -

компоненты поля равны нулю, то удобно выразить передаваемую мощность P (5.8b) через потенциал φ :

$$P = \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{2\pi\sqrt{\mu}} \int_S dS (\nabla\varphi)^2. \quad (5.13a)$$

Погонная плотность потока энергии в металл на единицу длины согласно (5.8c)

$$Q = \frac{c\zeta'\varepsilon}{2\pi\mu} \oint_{\Gamma} dr (\nabla\varphi)^2 \quad (5.13b)$$

В итоге получаем, что длина распространения

$$\ell = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}\zeta'} \frac{\int_S dS (\nabla\varphi)^2}{\oint_{\Gamma} dr (\nabla\varphi)^2}. \quad (5.13c)$$

5-4.3 Трансформатор

Для трансформатора всегда выполняется условие

$$L_{12}^2 \leq L_1 L_2, \quad L_{12} = L_{21}.$$

Последнее равенство называется также теоремой взаимности.

5-4.3.1 Нагрузка за трансформатором

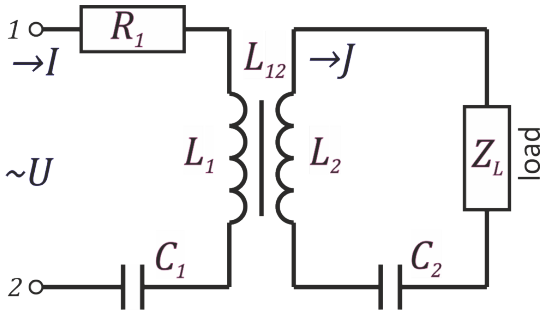


Рис. 5.6 Нагрузка за трансформатором.

Рассмотрим схему, изображённую на Рис. 5.6. Схема содержит полезную нагрузку Z_L , подключённую к источнику переменного напряжения U через трансформатор; ёмкости C_1 и C_2 на относятся к полезной нагрузке и в дальнейшем могут быть выбраны с целью оптимизации того или иного параметра схемы. Уравнениями, определяющими токи в схеме, являются

$$\begin{aligned} U &= IZ_1 - i\omega J L_{12}, & Z_1 &= R_1 - i\omega L_1 + \frac{iC_1}{\omega}, \\ 0 &= JZ_2 - i\omega I L_{12}, & Z_2 &= Z_L - i\omega L_2 + \frac{iC_2}{\omega}. \end{aligned}$$

В результате получаем, что с точки зрения внешнего источника импеданс всей цепи как целого равен

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{Z_1 Z_2 + \omega^2 L_{12}^2}{Z_2}. \quad (5.14)$$

5-4.3.2 Двухпроводная линия, питающая нагрузку за трансформатором

Рассмотрим подключение нагрузки ‘load’ к двухпроводной линии через трансформатор. Мы предполагаем, что в двухпроводной линии фиксирована амплитуда падающей волны J_+ . Импеданс Z_L нагрузки предполагается малой и почти действительной величиной вследствие близости к резонансу. Наша цель – достигнуть максимального значения выделения тепла на нагрузке ‘load’ при фиксированном значении волнового сопротивления линии Z_{line} .

При этом разумно предположить, что ёмкости перед и за трансформатором подобраны так, что $L_1 C_1 = L_2 C_2 = \omega^2$ (т.е. соответствующие замкнутые контура являются резонансными), а сопротивление перед трансформатором пренебрежимо мало, так что можно принять $R_1 = 0$. В результате выделяющуюся мощность W на нагрузке ‘load’ остаётся максимизировать по силе связи трансформатора L_{12} . В результате получаем, что $Z_1 = 0$, $Z_2 = Z_L (\equiv R_L)$, эффективная величина нагрузки

$$Z = \frac{\omega^2 L_{12}^2}{Z_L}$$

а выделяющаяся мощность на полезной нагрузке

$$W = |J_+|^2 \frac{2Z Z_{\text{line}}^2}{(Z_{\text{line}} + Z)^2} = \frac{2\omega^2 L_{12}^2 Z_{\text{line}}^2 R_L}{(R_L Z_{\text{line}} + \omega^2 L_{12}^2)^2} |J_+|^2,$$

см. (5.12); мы предположили, что в линии потерь нет, так что её волновой импеданс Z_{line} чисто действителен. Тогда максимум мощности W достигается, когда

$$L_{12} = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z_{\text{line}} R_L},$$

то есть достигается условие согласования, $Z = Z_{\text{line}}$. В этом случае выделяющаяся мощность оказывается равной $W = Z_{\text{line}} |J_+|^2 / 2$, как и следовало ожидать, поскольку в условиях согласования отражённая волна линии отсутствует. Отметим, что если сопротивление нагрузки R_L мало (т.е. резонансный контур R_L - L_2 - C_2 обладает высокой добротностью), то и величина связи L_{12} также оказывается малой.

5-4.4 Задачи

• **Задача 1:** Учесть затухание сигнала в коаксиальном волноводе за счёт потерь в скин-слое и вычислить длину l распространения главной моды. Внутренний радиус коаксиального волновода равен a , внешний – b , частота сигнала – ω , поверхностный импеданс металла – ζ , диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость материала между жилами равны ε и μ .

• **Задача 2:** Рассмотрим коаксиальный провод (SAT 703): Обе жилы линии сделаны из меди, диаметр

центральной жилы равен $a = 1.13$ мм, внутренний диаметр обмотки (вторая жила) равен $b = 4.8$ мм. Пространство между жилами заполнено вспененным полиэтиленом, у которого диэлектрическая проницаемость (частота сигнала 2 ГГц) равна $\epsilon = 1.6$. Найдите вол-

новое сопротивление (в омах), погонные ёмкость C и индуктивность L . Учтя потери, найдите длину распространения сигнала l . Поверхностное сопротивление (см. (4.5f, 4.5h)) меди при указанной частоте равно $R_s = 0.011$ Ом. Чему равна величина ζ' в (4.5f)?

§5-5. Плоские диэлектрические волноводы

Литература: [Маркузе, 1974, § 8.4].

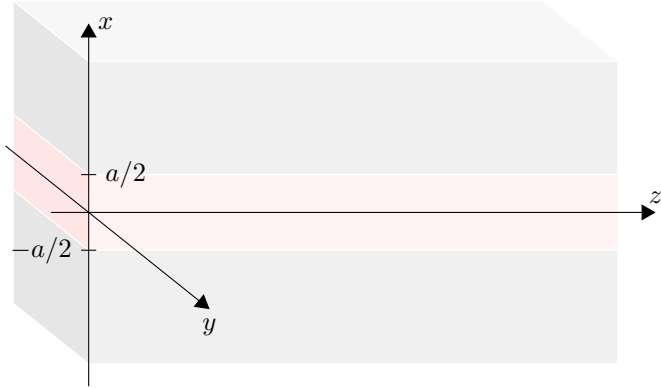


Рис. 5.7

Рассмотрим распространение направленной моды вдоль однородной пластины. Пластина занимает область $-a/2 < x < a/2$. Диэлектрическая проницаемость материала пластины равна ϵ_c (от английского ‘core’). Диэлектрическая проницаемость окружающей пластину с обеих сторон среды равно ϵ_{cl} (от английского ‘cladding’). Для краткости записи введём обозначение волнового вектора в окружающем пространстве k и контраста диэлектрической проницаемости между пластиной и окружающей средой $\epsilon = 1 + \Delta$:

$$k = \sqrt{\epsilon_{cl}} \frac{\omega}{c}, \quad \epsilon = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cl}}, \quad \Delta = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cl}} - 1. \quad (5.16)$$

Обозначения § 5-1 нуждаются в уточнении: мы будем предполагать, что вдоль оси Oy поле является однородным.

Направленные моды в волноводах делятся на ТЕ- и ТМ-моды. В ТЕ-моды у электрического поля ненулевой является только E^y компонента, B^y -компонента магнитного поля равна нулю. Всё поле параметризуется одной компонентой E^y . В ТМ-моды, соответственно, наоборот: всё электромагнитное поле параметризуется единственной ненулевой B^y -компонентой магнитного поля, тогда как $E^y = 0$.

5-5.1 ТЕ-моды

Электромагнитное поле ТЕ-волны полностью определяется поперечной компонентой электрического поля

E^y . Остальные компоненты электрического поля равны нулю, а компоненты магнитного поля можно найти из уравнения Максвелла (второе уравнение (5.2d) и x -компонента (5.2a)) на магнитную индукцию:

$$B^z = \frac{ic}{\omega} \partial_x E^y, \quad B^x = \frac{c\beta}{\omega} E^y. \quad (5.17a)$$

Отсюда видно, что на границе раздела непрерывным должно быть не только электрическое поле, но и его производная $\partial_x E^y$. Уравнение на электрическое поле (5.2m)

$$-\partial_x^2 E^y + \left(\beta^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(x) \right) E^y = 0 \quad (5.17b)$$

совпадает с уравнением квантовой механики на стационарные волновые функции частицы, совершающей одномерное движение в потенциале прямоугольной ямы конечной глубины, см. например [Флюгге, 1974a]. Поиск направленных мод соответствует нахождению связанных состояний в квантово-механической задаче.

Поле направленной моды является симметричным или анти-симметричным по отношению к зеркальному отражению $x \rightarrow -x$. Будем обозначать волновой профиль направленной моды как $E^y = E_{n\pm}$, где нумерация моды начинается с единицы, $n \geq 1$, а симметрия

$$E_{n\pm}(-x) = \pm E_{n\pm}(x). \quad (5.17c)$$

Если мода связанная, то вне пластины, при $|x| > a/2$, поле экспоненциально убывает при удалении от сердцевины волновода с некоторым декрементом κ ,

$$\begin{aligned} E_{n+} &= A \cdot \exp(-\kappa|x|), \\ E_{n-} &= A \cdot \text{sign}(x) \cdot \exp(-\kappa|x|), \\ \kappa^2 &= \beta^2 - k^2 = \beta^2 - \epsilon_{cl}(\omega/c)^2 > 0. \end{aligned} \quad (5.17d)$$

а внутри пластины, при $|x| < a/2$, поперечная структура поля есть стоячая волна,

$$\begin{aligned} E_{n+} &= \cos(qx), \\ E_{n-} &= \sin(qx), \\ q^2 &= \epsilon k^2 - \beta^2 = \epsilon_c(\omega/c)^2 - \beta^2 > 0. \end{aligned} \quad (5.17e)$$

Объединяя неравенства (5.17d, 5.17e) заключаем, что отношение β/k , которое можно назвать относительным эффективным коэффициентом преломления, заключено в пределах

$$1 < \frac{\beta}{k} < \sqrt{\epsilon}. \quad (5.17f)$$

Если снова вернуться к аналогии с квантовой механикой, положив постоянную Планка $\hbar = 1$ и массу частицы $m = 1$, то энергией связанного состояния будет $-\kappa^2/2$, глубиной прямоугольной ямы будет $(\varepsilon - 1)k^2/2$, а её шириной — a . В соответствии с этим сопоставлением и опытом решения задачи квантовой механики о прямоугольной яме конечной глубины, определим безразмерный параметр

$$V = \frac{\sqrt{\varepsilon - 1} ka}{\pi} = \frac{\sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_{cl}} \omega a}{\pi c}. \quad (5.17g)$$

Как будет показано ниже, целая часть $(V + 1)$ есть число направленных мод в волноводе при заданной частоте с фиксированной поляризацией.

5-5.1.1 Симметричные моды

Найдём закон дисперсии и распределение электрического поля для симметричных мод. Из условия непрерывности электрического поля и его производной на границе раздела получаем, что

$$q \operatorname{tg} \frac{qa}{2} = \kappa. \quad (5.17h)$$

Графически решение этого уравнения может быть представлено на Рисунке 5.8 пересечениями синих и красного оттенка сплошных линий, где в качестве горизонтальной оси взята безразмерная переменная p , которая появляется при переписывании соотношения (5.17h) в виде

$$p^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi p}{2} = V^2 - p^2, \quad p = \frac{qa}{\pi}, \quad (qa)^2 + (\kappa a)^2 = \pi^2 V^2. \quad (5.17i)$$

Частота отсечки моды № n , $n \geq 0$, равна

$$\omega_{cn+} = \frac{2\pi nc}{a\sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_{cl}}}, \quad n \geq 0. \quad (5.17j)$$

Фундаментальная мода Рассмотрим более подробно симметричную моду с номером $n = 0$, не имеющую частоты отсечки. Область малых частот может быть названа пределом малой избыточной оптической толщины пластины $V \ll 1$. Такую пластину будем называть тонким волноводом (при соответствующей частоте волны). Единственный корень дисперсионного уравнения есть

$$p \approx V - \frac{\pi^2 V^3}{8} \Rightarrow \kappa \approx \frac{\pi}{2a} V = \frac{(\varepsilon - 1)ka}{2}. \quad (5.17k)$$

Если мал безразмерный параметр $\varepsilon ka \ll 1$, то мода локализована на расстоянии, большом по сравнению с толщиной пластины a , то есть $\kappa a \ll 1$. Такой волновой назовём тонким. Для тонкого волновода закон дисперсии

$$\frac{\beta}{k} \approx 1 + \frac{1}{8}((\varepsilon - 1)ka)^2. \quad (5.17l)$$

Возможен промежуточный предел, когда избыточная оптическая толщина пластины мала, $\sqrt{\varepsilon}ka \ll 1$, но не

мал параметр εka . Этот предел существует, только если $\varepsilon \gg 1$. Тогда поле моды оказывается существенно ослабленным на расстоянии $\gtrsim 1/k$ от пластины.

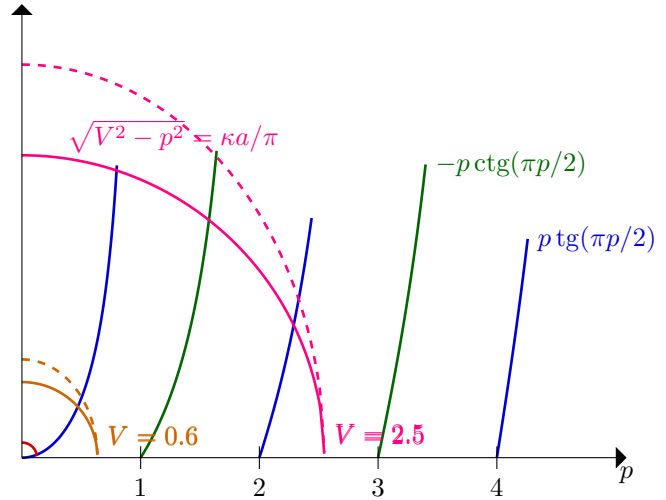


Рис. 5.8 Графический метод отыскания корней уравнений (5.17h, 5.17m), определяющих дисперсию чётных и нечётных ТЕ-мод (сплошные линии красного оттенка) и ТМ-мод (пунктирные линии красного оттенка, было выбрано $\varepsilon = 1.3$). Красная сплошная кривая для $V = 0.2$.

5-5.1.2 Антисимметричные моды

Для антисимметричной моды дисперсионное уравнение (5.17h) заменяется на

$$-q \cot \frac{qa}{2} = \kappa. \quad (5.17m)$$

Графическим решением уравнения (5.17m) является пересечение зелёных и красного оттенка сплошных линий на Рис. 5.8. Все антисимметричные моды имеют ненулевую частоту отсечки. Антисимметричная мода № n , где $n \geq 1$, определяется условием $\pi(n - 1) < qa < \pi n$. Мо-да с самой маленькой частотой отсечки характеризуется условием $aq < \pi$. Частота отсечки моды № n

$$\omega_{cn-} = \frac{\pi(2n - 1)c}{a\sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_{cl}}}, \quad n \geq 1. \quad (5.17n)$$

Объединяя условия возникновения чётных (5.17j) и нечётных (5.17n) мод, получаем, что пороговый волновой вектор k_n (5.16) возникновения ТЕ-моды № n (общая нумерация для чётных и нечётных мод, которые следуют через одну)

$$\text{ТЕ:} \quad k_n = \frac{\sqrt{\varepsilon_{cl}} \omega_{cn}}{c} = \frac{n}{\sqrt{\Delta}} k_a, \quad k_a = \frac{\pi c}{a}. \quad (5.17o)$$

Волновое число $k = k_a$ соответствует длине волны $\lambda = 2\pi/k$ в материале обкладки, равной ширине $2a$ сердцевинны волновода.

5-5.1.3 Предел толстого волновода

Толстый, или моноמודовый волновод соответствует пределу большой безразмерной толщины волновода $V \gg 1$ (5.17i).

Получить закон дисперсии через фазы, набегающие при полном внутреннем отражении, см. Пункт 4-1.1 ...

5-5.2 ТМ-моды

В ТМ-моде электромагнитное поле удобно параметризовать единственной ненулевой компонентой магнитного поля B^y . Волновое уравнение

$$-\text{rot} \frac{1}{\varepsilon(x)} \text{rot} \mathbf{B} + \left(\beta^2 - \varepsilon(x) \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{B} = 0,$$

спроектированное на y -направление, даёт

$$-\partial_x \frac{1}{\varepsilon(x)} \partial_x B^y + \left(\frac{\beta^2}{\varepsilon(x)} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) B^y = 0. \quad (5.18a)$$

Из этого уравнения, в частности, следует, что на границе раздела непрерывными должны быть само поле и его производная нормированная на диэлектрическую проницаемость:

$$\text{continuous on the boundary:} \quad B^y, \quad \frac{1}{\varepsilon(x)} \partial_x B^y. \quad (5.18b)$$

Остальные компоненты магнитного поля равны нулю, а компоненты электрического поля можно найти из уравнения Максвелла на электрическую индукцию:

$$E^z = -\frac{ic}{\varepsilon(x)\omega} \partial_x B^y, \quad E^x = -\frac{c\beta}{\varepsilon(x)\omega} B^y. \quad (5.18c)$$

Как и в случае ТЕ-волн, постоянная распространения β ограничена сверху показателем преломления сердцевинки волновода, см. (5.17e). Действительно, интегральное неравенство

$$0 < \int dx \frac{(\partial_x B^y)^2}{\varepsilon(x)} = \int dx \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\beta^2}{\varepsilon(x)} \right) (B^y)^2, \quad (5.18d)$$

(преобразование правой части неравенства есть следствие волнового уравнения (5.18a)) говорит, что

$$\beta^2 < \varepsilon_{\max} \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (5.18e)$$

где $\varepsilon_{\max}$ — максимальное значение диэлектрической проницаемости.

Пример кривых, изображающих закон дисперсии, показан на Рисунке 5.9. В качестве вертикальной оси взята величина β/k (эффективный показатель преломления $n_{\text{eff}} = \sqrt{\varepsilon_{\text{cl}}} \beta/k$), поскольку для мод всех типов она ограничена пределами

$$1 < \frac{\beta}{k} < \sqrt{\varepsilon}, \quad k = \sqrt{\varepsilon_{\text{cl}}} \frac{\omega}{c}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{\text{cl}}}. \quad (5.18f)$$

По горизонтали отложена безразмерная частота $2V$ (5.17i), её также же можно назвать безразмерной толщиной волновода.

Волновые профили направленных мод $B_{n\pm}$ введём согласно тем же обозначениям, которые были использованы при определении волновых профилей ТЕ-волн, см. (5.17c, 5.17d, 5.17e).

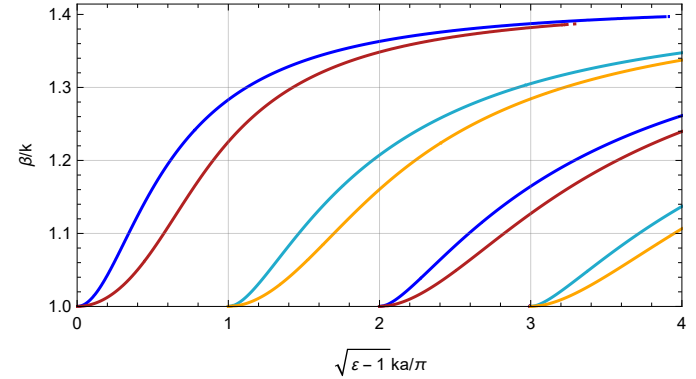


Рис. 5.9 Линии синего оттенка — ТМ-моды, линии красного оттенка — ТЕ-моды; тёмные и светлые линии — симметричные и асимметричные моды соответственно. Было взято $\varepsilon = 2$; отношение β/k удовлетворяет неравенствам (5.17f).

5-5.2.1 Симметричные и антисимметричные моды

Из граничных условий (5.18b) и уравнения (5.18a) вне границы следуют дисперсионное уравнение

$$q \operatorname{tg} \frac{qa}{2} = \varepsilon \kappa \quad (5.18g)$$

для симметричных мод и соотношение

$$-q \operatorname{ctg} \frac{qa}{2} = \varepsilon \kappa \quad (5.18h)$$

для антисимметричных мод. По сравнению с дисперсионными уравнениями для ТЕ-мод (5.17h, 5.17m), в дисперсионных уравнениях (5.18g, 5.18h) для ТМ-мод правая часть оказывается домноженной на ε . При одинаковых значениях безразмерных параметров Δ , V ТМ-мода локализована в меньшей степени (имеет меньшее κ), чем ТЕ-мода.

В частности это означает, что частоты отсечки для симметричных и антисимметричных мод определяются теми же соотношениями (5.17j, 5.17n). Наряду с фундаментальной ТЕ-модой существует и фундаментальная ТМ-мода, имеющая нулевую частоту отсечки. При $V \ll 1$ асимптотические выражения (5.17k) надо заметить на

$$\kappa \approx \frac{(\varepsilon - 1)ka}{2\varepsilon}, \quad \frac{\beta}{k} \approx 1 + \frac{1}{8\varepsilon^2} ((\varepsilon - 1)ka)^2. \quad (5.18i)$$

Графическое решение для законов дисперсии ТМ-мод следует искать как пересечения синих и зелёных линий с пунктирными линиями красного оттенка на Рис. 5.8. При фиксированной частоте и номере моды постоянная распространения ТМ-моды оказывается всегда меньше чем постоянная распространения ТЕ-моды. Этот факт продемонстрирован на Рис. 5.9.

5-5.3 Задачи

• **Задача 1:** Рассмотрите моды в плоском симметричном волноводе, не имеющие частоты обрезки. Определите пространственную структуру электромагнитного поля и вектора поляризации для предела, когда моды являются слабо-связанными.

• **Задача 2:** Рассмотрите моды в плоском симметричном волноводе, имеющие высокий номер. Как структура таких мод описывается в квази-классическом приближении? Используя правило Бора-Зоммерфельда, покажите, что параметр V (5.17g) действительно определяет, сколько имеется направленных мод в волноводе при фиксированной частоте.

• **Задача 3:** Найти ТМ-моды в плоском диэлектрическом волноводе с симметричными обкладками.

• **Задача 4:** Пусть разница показателей преломления сердцевины и обкладок волновода мала,

$$\Delta = \varepsilon - 1 \ll 1,$$

но волновод не обязательно является тонким. Найдите в главном порядке по Δ разницу постоянных распространения $\delta\beta = \beta_{TM} - \beta_{TE}$ симметричных ТЕ- и ТМ-мод. *Указание:* Считайте, что $\beta_{TE} \equiv \beta$ известно как решение (5.17i); ответ для δp выразите в терминах p, V , ответ для $\delta\beta$ выразите в терминах k, β, q, κ, a (но не p), избавившись в обоих случаях от тригонометрии. Задачу решите двумя способами: путём вычитания с последующей линеаризацией по малым $\delta p, \Delta$ уравнений (5.17h, 5.18g), и путём квантовомеханической теории возмущений, когда невозмущённой частью уравнения (5.18a) на структуру ТМ-моды принимается уравнение на структуру ТЕ-моды (5.17b).

Решение: Проведём вычисления, пользуясь теорией возмущений для уравнений типа уравнения Шредингера. В уравнении (5.18a) на поле ТМ-моды выделим часть, соответствующую уравнению на ТЕ-моду, а остальное вынесем в правую часть как возмущение:

$$\hat{H}_0(\beta + \delta\beta) N^y = -\hat{V} N^y, \quad (5.19a)$$

$$\hat{H}_0(\beta) = -\partial_x^2 + \beta^2 - \varepsilon(x)k^2, \quad \hat{V} = \frac{\partial_x \varepsilon(x)}{\varepsilon(x)} \partial_x.$$

В первом порядке теории возмущений (что включает в себя первый порядок по Δ) приводит к уравнению

$$\delta\beta \int_{-\infty}^{\infty} dx N_0^y \frac{\delta \hat{H}_0}{\delta \beta} N_0^y = \int_{-\infty}^{\infty} dx N_0^y \hat{V} N_0^y. \quad (5.19b)$$

§5-6. Направленные моды в аксиально симметричном волноводе

Оптоволкнами называют длинные нити, изготовленные из диэлектрика, чаще всего из стекла. Такие нити используются в качестве передатчика информации, поскольку являются волноводами: вдоль оптоволокон могут распространяться электромагнитные импульсы, электромагнитное поле в которых локализовано вблизи внутри оптоволокон.

Поскольку обычно несущая частота передаваемого сигнала по оптоволокну находится в инфракрасной области, то вещество волновода не проявляет магнитных свойств, т.е. коэффициент магнитной восприимчивости $\mu = 1$. Коэффициент диэлектрической проницаемости ε отличен от единицы и может изменяться в пространстве. Мы рассматриваем случай идеального аксиально симметричного оптоволокон, в котором диэлектрическая проницаемость является функцией только поперечной координаты. Предполагается, что вблизи оси оптоволокон ε имеет максимум.

Основной задачей является исследование движения импульса вдоль оси волновода. Для того, чтобы получить эффективное одномерное уравнение, описы-

вающее распространение электромагнитного импульса вдоль оптоволокон, надо сначала найти структуру электромагнитного поля в поперечной оптоволоконной плоскости. Поэтому прежде всего требуется решить трёхмерные уравнения Максвелла в поперечной области, тем самым сведя задачу к одномерной.

5-6.1 Основные обозначения

Введём цилиндрические координаты ρ, φ, z , связанные с оптоволоком. В случае, когда мы будем работать в декартовых координатах, ось Oz будет направлена по оси оптоволокон. Индексами $i, j, k, \dots$ мы будем обозначать все три координаты, а греческими индексами $\alpha, \beta, \dots$ поперечные координаты x, y .

Волновод представляет собой прозрачный цилиндр кругового сечения, называемый сердцевинкой (*core*), окружённый прозрачным цилиндрическим слоем однородного материала, называемый обкладкой (*cladding*), который будем считать достаточно толстым для того, чтобы его можно было считать формально бесконеч-

ным. Здесь мы будем интересоваться самым простым случаем с точки зрения математического анализа, когда сердцевина является оптически однородной средой, то есть во всём пространстве радиальная зависимость диэлектрической проницаемости является кусочно постоянной (*step-index profile*):

$$\varepsilon(\rho) = \begin{cases} \varepsilon_c, & \rho < a \\ \varepsilon_{cl}, & \rho > a. \end{cases} \quad (5.20a)$$

Классификация всех мод и описание их свойств такого оптического волновода можно найти в [Маркузе, 1974, Гл. 8].

Введём безразмерный параметр ε , равный отношению диэлектрических проницаемостей сердцевины оптоволокна и материала, окружающего сердцевину

$$\varepsilon \equiv 1 + \Delta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}}. \quad (5.20b)$$

Вторым безразмерным параметром, характеризующим работу волновода на данной частоте, является V (общепринятые названия “normalized frequency” или “V-number”):

$$V = \frac{\omega a}{c} \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_{cl}} = \sqrt{\Delta} k a, \quad k = \frac{\sqrt{\varepsilon_{cl}} \omega}{c}. \quad (5.20c)$$

Мы покажем, что количество направленных мод на данной частоте приближённо равно

$$N_{\text{modes}} \approx \frac{V^2}{4} \quad (5.20d)$$

(численный факт: хорошо работает начиная с $V > 5$). При $V < 2.4048$ оптоволокно работает в одно-модовом режиме.

Вместо частоты ниже мы будем использовать k — волновое число в материале обкладки. Мы будем полагать, что $\varepsilon(\rho)$ нормировано на диэлектрическую проницаемость обкладок ε_{cl} , так что $\varepsilon(\rho > a) = 1$. При этом следует сделать перемасштабирование электрического поля:

$$\sqrt{\varepsilon_{cl}} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}. \quad (5.21)$$

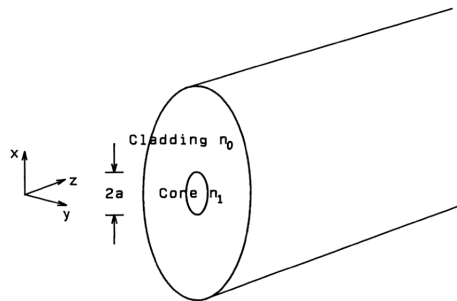


Рис. 5.10 Схематическое строение оптоволокна и выбор системы координат

5-6.2 Волновое уравнение

Волновое уравнение с учётом неоднородности оптических свойств среды в терминах вектор-потенциала имеет вид (5.2k, 5.2l). В области, где оптические свойства среды однородны, компоненты электромагнитного поля в декартовых координатах удовлетворяют волновому уравнению

$$(\Delta^\perp + (\varepsilon\omega^2 - \beta^2)) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0. \quad (5.22a)$$

Квантовыми числами, определяющими моду, являются:

- Аксиальное квантовое число ν задаёт симметрию решения уравнений Максвелла (5.2k) по отношению к повороту вокруг оси оптоволокна. Каждая мода имеет фиксированное аксиальное число ν . Эту симметрию математически надо формулировать в цилиндрической системе координат: например, для компонент магнитного поля

$$H^\rho, H^\varphi, H^z \propto e^{i\nu\varphi}, \quad (5.22b)$$

где $\nu \in \mathbb{Z}$.

- Радиальное квантовое число μ , равное числу нулей E^z и H^z как функций радиальной координаты ρ .
- Параметр, принимающий два значения и соответствующий двум поляризациям волны в однородном пространстве. Как будет показан ниже, только моды с $\nu = 0$ имеют чистые ТМ и ТЕ поляризации, поэтому все остальные моды обозначаются ЕН и НЕ моды [Маркузе, 1974], в зависимости от того, какая из z -компонент поля больше.

Как и в однородном пространстве, свободно распространяющееся поле в неоднородной среде может быть параметризовано двумя скалярными функциями. Будем считать, что рассматривается поле одной моды, имеющей аксиальное число ν . Одним из технически удобных вариантов является выбор z -компонента полей в качестве этих двух независимых скалярных функций. Волновое уравнение (5.22a), которому удовлетворяют z -компоненты поля при фиксированном аксиальном числе, принимает вид

$$\left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho + \left((\varepsilon(\rho) k^2 - \beta^2) - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) \right) \begin{pmatrix} E^z \\ H^z \end{pmatrix} = 0. \quad (5.22c)$$

Это есть уравнение на функцию Бесселя порядка ν .

5-6.2.1 Поперечные компоненты поля

Для нахождения вида волнового уравнения на поперечные компоненты поля $\{H^\rho, H^\varphi\}$ в полярных координатах

тах $\{\rho, \varphi\}$ свяжем их компонентами в декартовых координатах:

$$\begin{pmatrix} H^x \\ H^y \end{pmatrix} = \hat{O} \begin{pmatrix} H^\rho \\ H^\varphi \end{pmatrix}, \quad \hat{O}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (5.22d)$$

Домножим обе части уравнения (5.22d) на $e^{-i\nu\varphi}$, после чего в правой части зависимость от угла будет происходить только из оператора поворота $\hat{O}$. Разложим вектор $\mathbf{H}^\perp e^{-i\nu\varphi}$ по собственным векторам оператора поворота $\hat{O}$, которыми являются

$$\hat{O}(\varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ -si \end{pmatrix} = e^{is\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ -si \end{pmatrix}, \quad s = \pm 1. \quad (5.22e)$$

Наконец, домножим обе части уравнения (5.22d) на обратный фазовый множитель $e^{i\nu\varphi}$. В результате получаем угловую зависимость декартовых компонент поперечной части магнитного поля

$$\begin{pmatrix} H^x \\ H^y \end{pmatrix} = \sum_{s=\pm 1} H_{\nu s}(\rho) \begin{pmatrix} 1 \\ -si \end{pmatrix} e^{i(\nu+s)\varphi}, \quad (5.22f)$$

$$\begin{pmatrix} H^\rho \\ H^\varphi \end{pmatrix} = \sum_{s=\pm 1} H_{\nu s}(\rho) \begin{pmatrix} 1 \\ -si \end{pmatrix} e^{i\nu\varphi}, \quad (5.22g)$$

где $H_{\nu s}(\rho)$ — две, пока неизвестные функции радиальной координаты. Теперь подставим в волновое уравнение (5.22a) угловую зависимость (5.22f). Получим уравнению

$$\left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho + \left(\varepsilon(\rho) k^2 - \beta^2 \right) - \frac{(\nu + s)^2}{\rho^2} \right) H_{\nu s}(\rho) = 0. \quad (5.22h)$$

Таким образом, функция $H_{\nu s}(\rho)$ есть функция Бесселя порядка $|\nu + s|$ в областях, где диэлектрическая проницаемость ε постоянна.

Положим, что в качестве двух независимых функций выбраны поперечные компоненты магнитного поля, см. (5.2h, 5.2i). Продольная компонента магнитного поля и компоненты электрического поля равны

$$H^z = \frac{i \operatorname{div} \mathbf{H}^\perp}{\beta} = \frac{i}{\beta \rho} \partial_\rho(\rho H^\rho) - \frac{\nu}{\beta \rho} H^\varphi, \quad (5.22i)$$

$$E^z = \frac{i [\operatorname{rot} \mathbf{H}]^z}{\varepsilon k} = \frac{\nu}{\varepsilon k \rho} H^\rho + \frac{i}{\varepsilon k \rho} \partial_\rho(\rho H^\varphi). \quad (5.22j)$$

$$E^\varphi = -\frac{i}{\varepsilon \omega} \partial_\rho H^z - \frac{\beta}{\omega \varepsilon} H^\rho, \quad (5.22k)$$

$$E^\rho = -\frac{\nu}{\varepsilon k \rho} H^z + \frac{\beta}{k \varepsilon} H^\varphi. \quad (5.22l)$$

Подчеркнём, что уравнения (5.22i, 5.22j, 5.22k, 5.22l) верны при любом аксиально-симметричном профиле диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\rho)$.

5-6.2.2 Граничные условия

Если же поле параметризуется продольными компонентами E^z, H^z , то граничными условиями является непрерывность величин

$$E^z, \quad E^\varphi = \frac{ik \partial_\rho H^z + (\nu \beta / \rho) E^z}{\beta^2 - \varepsilon(\rho) k^2}, \quad (5.22m)$$

$$H^z, \quad H^\varphi = \frac{(\nu \beta / \rho) H^z - i \varepsilon(\rho) k \partial_\rho E^z}{\beta^2 - \varepsilon(\rho) k^2}.$$

Выражения для азимутальных компонент электромагнитного поля E^φ и H^φ следуют из (5.2p, 5.2q).

Из непрерывности компоненты электрического поля E^z и всех трёх компонент магнитного поля $\mathbf{H}$ следует, что граничными условиями является непрерывность четырёх функций

$$H^\rho, \quad \partial_\rho H^\rho, \quad H^\varphi, \quad \frac{i \partial_\rho(\rho H^\varphi) + \nu H^\rho}{\varepsilon}. \quad (5.22n)$$

Непрерывность $\partial_\rho H^\rho$ следует из непрерывности $H^{\rho, \varphi}$ и непрерывности H^z , записанном в виде (5.22i). Непрерывность последней комбинации в (5.22n) следует из непрерывности E^z , записанного в виде (5.22j).

5-6.3 Дисперсионное уравнение

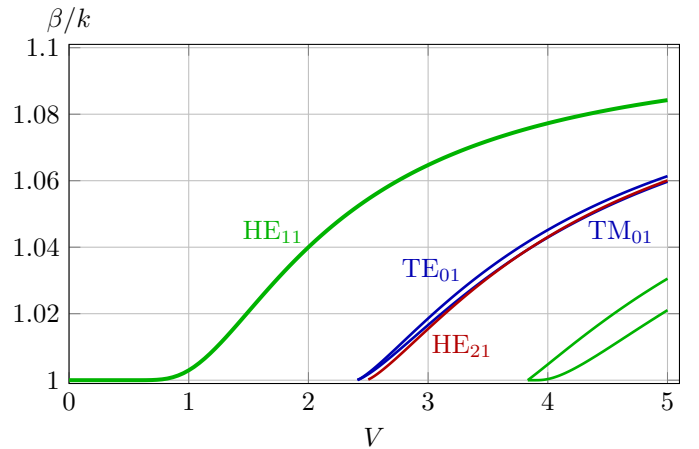


Рис. 5.11 Дисперсия связанных мод в оптоволокне при $\sqrt{\varepsilon} = 1.1$ в координатах $V = \sqrt{\Delta} ka$ и β/k . Моды с аксиальным числом $\nu = 0, 1, 2$ обозначены синим, зелёным и красным соответственно. Моде с $\nu = 1$ с наибольшим β есть фундаментальная мода. Все остальные моды имеют ненулевую частоту отсечки. Отметим, что при одной и той же частоте постоянная распространения TE_{01} -моды больше, чем у TM_{01} -моды, аналогичное неравенство имеет место в плоском волноводе, см. Рисунок 5.9.

Для волновода с кусочно-постоянной зависимостью диэлектрической проницаемости ε от расстояния до его оси технически более удобным оказывается проводить

вычисления в терминах z -компонент полей. Поскольку эти компоненты удовлетворяют уравнению Бесселя (5.22c), то поле в сердцевине волновода имеет вид

$$\begin{pmatrix} H^z \\ E^z \end{pmatrix} = e^{i\nu\varphi} \begin{pmatrix} H_\nu^{\text{in}} \\ E_\nu^{\text{in}} \end{pmatrix} J_\nu(q\rho), \quad (5.23a)$$

а в обкладке оно есть

$$\begin{pmatrix} H^z \\ E^z \end{pmatrix} = e^{i\nu\varphi} \begin{pmatrix} H_\nu^{\text{out}} \\ E_\nu^{\text{out}} \end{pmatrix} K_\nu(\kappa\rho). \quad (5.23b)$$

Уравнения непрерывности полей (5.22m) приводят нас к системе, данной в [Маркузе, 1974, с. 379]:

$$\begin{pmatrix} J_\nu & 0 & 0 & -K_\nu \\ 0 & J_\nu & -K_\nu & 0 \\ \frac{\nu\beta J_\nu}{q^2 a} & -\frac{\varepsilon k J'_\nu}{q} & -\frac{k K'_\nu}{\kappa} & \frac{\nu\beta K_\nu}{\kappa^2 a} \\ -\frac{k J'_\nu}{q} & \frac{\nu\beta J_\nu}{q^2 a} & \frac{\nu\beta K_\nu}{\kappa^2 a} & -\frac{k K'_\nu}{\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_\nu^{\text{in}} \\ iE_\nu^{\text{in}} \\ iE_\nu^{\text{out}} \\ H_\nu^{\text{out}} \end{pmatrix} = 0, \quad (5.23c)$$

где аргумент у всех J есть qa , а у всех K он равен κa . Прежде чем считать детерминант у матрицы в (5.23c), поделим у неё первые два столбца на $-J_\nu$, последние два столбца на $-K_\nu$, и ещё последние две строчки на κa . Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{\nu\beta}{k(qa)^2} & -\frac{\varepsilon J'_\nu}{qa J_\nu} & \frac{K'_\nu}{\kappa a K_\nu} & -\frac{\nu\beta}{k(\kappa a)^2} \\ -\frac{J'_\nu}{qa J_\nu} & \frac{\nu\beta}{k(qa)^2} & -\frac{\nu\beta}{k(\kappa a)^2} & \frac{K'_\nu}{\kappa a K_\nu} \end{pmatrix}. \quad (5.23d)$$

Теперь относительно несложно найти детерминант матрицы (5.23d), приравняв его нулю для нахождения дисперсионных законов для направленных мод. После некоторых выкладок получаем дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{J'_\nu}{qa \cdot J_\nu} + \frac{K'_\nu}{\kappa a \cdot K_\nu} \right) \left(\frac{J'_\nu}{qa \cdot J_\nu} + \frac{1}{\varepsilon \kappa a \cdot K_\nu} \right) = \\ & = \frac{\nu^2 \beta^2}{\varepsilon k^2} \left(\frac{1}{(qa)^2} + \frac{1}{(\kappa a)^2} \right)^2 = \\ & = \nu^2 \left(\frac{1}{(qa)^2} + \frac{1}{(\kappa a)^2} \right) \left(\frac{1}{(qa)^2} + \frac{1}{\varepsilon (\kappa a)^2} \right). \end{aligned} \quad (5.23e)$$

В этом уравнении безразмерные параметры, характеризующие физические параметры оптоволокна, исчерпываются двумя — V (5.20c) и Δ (5.20b), причём

$$V^2 = (qa)^2 + (\kappa a)^2. \quad (5.23f)$$

Графическое изображение дисперсии направленных мод. Типичные дисперсионные кривые в переменных

- безразмерный радиус сердцевины оптоволокна (безразмерная частота) $V = \sqrt{\Delta} ka$ — эффективный коэффициент преломления $n_{\text{eff}} = \beta/k$. Рисунок 5.11.
- безразмерный радиус сердцевины оптоволокна (безразмерная частота) ka — постоянная распространения β . Рисунок 5.12.

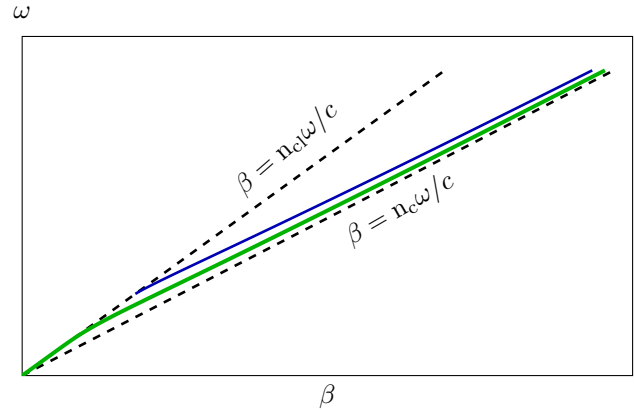


Рис. 5.12 Дисперсия связанных мод в оптоволокне при $\sqrt{\varepsilon} = 1.4$ в координатах β и ω . Синим обозначена мода с $\nu = 0$, зелёным — фундаментальная мода.

5-6.4 Задачи

• **Задача 1:** Исходя из квази-классического приближения показать, что оценка для количества направленных мод N_{modes} (5.20d) в аксиально симметричном волноводе со ступенчатым радиальным профилем показателя преломления действительно справедлива. *Указание:* при подсчёте количества доступных состояний учесть требование полного внутреннего отражения для поля связанной волны внутри сердцевины и воспользоваться правилом квантования Бора-Зоммерфельда.

• **Задача 2:** В аксиально-симметричном волноводе найти частоту отсечки для аксиально-симметричных мод (имеющие аксиальное число $\nu = 0$). Выразить эту частоту отсечки в терминах V -параметра (5.20c), $V = z$. При $V < z$ в волноводе возможно распространение только фундаментальной моды. Покажите, что аксиально-симметричные моды являются либо ТЕ-, либо ТМ-модами.

§5-7. Слабо ведущие волноводы

Среди оптических диэлектрических волноводов наиболее распространённым является *оптическое волокно* (*оптоволокно*, *optical fibre*). Оно полностью сделано из стекла, оптические свойства которого слабо изменяются от сердцевины (*core*) к периферии, которую называют обкладкой (*cladding*). Слабость изменения оптических свойств означает, что вариация диэлектрической проницаемости мала по сравнению с единицей. На практике величина вариации составляет менее одной сотой.

В пределе отсутствующей вариации оптических свойств среды в волноводе направленные моды в нём пропадают, превращаясь в плоские поперечные волны. Если вариация ненулевая, но мала, то для плоского волновода непосредственное сравнение уравнений на закон дисперсии для TE -мод (5.17h, 5.17m) и для TM -мод (5.18g, 5.18h) приводит к заключению, что эти уравнения совпадают в пределе

$$\Delta = \varepsilon - 1 \ll 1. \quad (5.25)$$

При этом число мод, которое определяется параметром V (5.17g), может быть как равно единице, так и велико.

В результате приходим к выводу, что исследование структуры направленных мод в волноводе в пределе (5.25) можно производить в рамках теории возмущений. В главном приближении достаточно считать, что направленная мода представляет собой чисто поперечную волну, амплитуда которой медленно, то есть на расстояниях многих длин волн, меняется в поперечном направлении. При этом, как мы увидим ниже, пространственной производной от диэлектрической проницаемости в волновом уравнении можно пренебречь, так что волновое уравнение по структуре становится идентичным уравнению Шрёдингера при любой пространственной конфигурации волновода в поперечной плоскости и для любой поляризации.

Такие волноводы называются *слабо-волноводящими волноводами* (*weakly guiding waveguides*), а моды в них — *линейно-поляризованными модами* (*linearly-polarized modes*). Рассмотрение слабо-ведущих волноводов можно найти, например, в [Снайдер и Лав, 1987, Гл. 32] или [Okamoto, 2006, 3.4. Linearly Polarized (LP) Modes].

5-7.1 Волновое уравнение

Преимущество уравнения (5.21) для описания слабо-ведущих волноводов состоит в том, что справа стоит градиент от показателя преломления, который для слабо-ведущего волновода как раз мал. Поэтому правой частью в этом пределе можно пренебречь, и мы получим два скалярных независимых друг от друга уравнения

$$(\Delta^\perp + \varepsilon k^2 - \beta^2) \mathbf{H}^\perp = 0. \quad (5.26)$$

Уравнение (5.26) есть уравнение квантовой механики, описывающее связанный уровень в двумерной

аксиально-симметричной потенциальной яме. Электрическое поле может быть восстановлено из магнитного поля по связи (5.2i), в которой пренебрежено градиентным вкладом, а диэлектрическая проницаемость взята постоянной и равной её значению в обкладке,

$$\mathbf{E}^\perp = \hat{\varepsilon} \mathbf{H}^\perp \quad (5.27)$$

с учётом приближённого равенства $\beta = k$. Иными словами, структура направленной моды действительно почти совпадает со структурой плоской волны в однородном пространстве, а электрическое поле в главном приближении удовлетворяет тому же уравнению (5.26).

5-7.1.1 Фундаментальная мода HE_{11} в круглом волноводе

Исследуем дисперсию фундаментальной моды в оптоволокне с круглым сечением с кусочно-постоянным показателем преломления предполагая, что скачок показателя преломления мал в смысле (5.25). *Литература:* [Okamoto, 2006, §3.5].

Решаем уравнение (5.26) для одной из компонент магнитного поля, скажем, для H^x . Для этой моды принято обозначение HE_{11} . Решение должно быть аксиально-симметричным, то есть

$$H^x = h^{\text{in}} J_0(q\rho), \quad \rho < a, \quad H^x = h^{\text{out}} K_0(\kappa\rho), \quad \rho > a, \quad (5.28a)$$

где h — пока неизвестная константа. Требуя непрерывность самого поля и его производной на границе раздела сред,

$$J_0(qa) = \frac{h^{\text{out}}}{h^{\text{in}}} K_0(\kappa a), \quad q J'_0(qa) = \frac{h^{\text{out}}}{h^{\text{in}}} \kappa K'_0(\kappa a), \quad (5.28b)$$

и используя рекуррентные соотношения $J'_0(z) = -J_1(z)$ и $K'_0(z) = -K_1(z)$, получаем условие существования нетривиального решения

$$\frac{qa J_1(qa)}{J_0(qa)} = \frac{\kappa a K_1(\kappa a)}{K_0(\kappa a)}, \quad (qa)^2 + (\kappa a)^2 = V^2. \quad (5.28c)$$

Для стандартного одномодового волокна $V \approx 2.3$, что даёт $\kappa a \approx 1.63$ и $qa = 1.62$.

Условие нормировки (5.2o) (после перемасштабировки (5.21)) приобретает вид

$$\int dx dy |\mathbf{H}^\perp|^2 = 1 \quad (5.28d)$$

с учётом связи (5.27) электрического и магнитного по-

лей. Для фундаментальной моды

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^2} \int_0^{qa} (J_0(z))^2 z dz + \frac{1}{\kappa^2} \frac{(J_0(qa))^2}{(K_0(\kappa a))^2} \int_{\kappa a}^{\infty} (K_0(z))^2 z dz = \\ = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(h^{\text{in}})^2}. \end{aligned} \quad (5.28e)$$

Если $\kappa a, qa \sim 1$, то получаем оценку для амплитуды поля нормированной моды $h^{\text{in}} \sim \sqrt{\Delta} k$.

Приближённое характеристическое уравнение (5.28e) можно получить и непосредственно из точного характеристического уравнения (5.23e). Полагая в левой части (5.23e) приближённо $\varepsilon_c \approx \varepsilon_{\text{cl}}$ и вычисляя квадратный корень из обеих частей уравнения, получаем

$$\frac{J'_\nu \pm (\nu/qa) J_\nu}{qa \cdot J_\nu} + \frac{K'_\nu \pm (\nu/\kappa a) K_\nu}{\kappa a \cdot K_\nu} = 0. \quad (5.28f)$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями для функций Бесселя

$$J'_\nu(z) \pm \frac{\nu}{z} J_\nu(z) = \pm J_{\nu \mp 1}(z), \quad (5.28g)$$

$$K'_\nu(z) \pm \frac{\nu}{z} K_\nu(z) = -K_{\nu \mp 1}(z), \quad (5.28h)$$

приходим к двум уравнениям

$$\frac{J_{\nu-1}}{qa \cdot J_\nu} = \frac{K_{\nu-1}}{\kappa a \cdot K_\nu}, \quad \frac{J_{\nu+1}}{qa \cdot J_\nu} = -\frac{K_{\nu+1}}{\kappa a \cdot K_\nu}. \quad (5.28i)$$

При $\nu = 1$ первое уравнение в (5.28i) совпадает с (5.28c), полученным из теории слабо ведущего волновода.

5-7.2 Поправки к закону дисперсии и полю

При определении выше закона дисперсии и пространственной структуры поля направленной моды мы пренебрегли последним слагаемым в волновом уравнении (??5.21)). Исследуем, какие поправки в закон дисперсии и в структуру моды вносит этот член. Обозначим $\hat{\mathcal{H}}$ оператор в уравнении на $\epsilon \mathbf{H}^\perp$ (5.21):

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{V}} \quad (5.28j)$$

где невозмущённая часть и возмущение равны

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \Delta^\perp + \varepsilon k^2 - \beta^2, \quad \hat{\mathcal{V}} = -\mathbf{g} \nabla_\perp^T. \quad (5.28k)$$

Мы также полагаем, что магнитное и электрическое поля моды, являющиеся решением уравнения (5.26) и связанные между собой (5.27), удовлетворяют условию нормировки (5.2o).

Поправка к постоянной распространения $\delta\beta$, связанная с отличием точного уравнения (5.21) и приближённого

уравнения (5.26), равна

$$\begin{aligned} \delta\beta &= \frac{1}{2k} \int dx dy \left((\hat{\epsilon} \mathbf{H}^\perp)^* \hat{\mathcal{V}} (\hat{\epsilon} \mathbf{H}^\perp) \right) = \\ &= -\frac{1}{2k} \int dx dy \left((\hat{\epsilon} \mathbf{H}^\perp)^* \cdot \mathbf{g} \right) \text{div} (\hat{\epsilon} \mathbf{H}^\perp) = \\ &= -\frac{1}{2k} \int dx dy (\mathbf{H}^{y*} \partial_x \varepsilon - \mathbf{H}^{x*} \partial_y \varepsilon) (\partial_x \mathbf{H}^y - \partial_y \mathbf{H}^x) \end{aligned} \quad (5.28l)$$

в рамках первого порядка теории возмущений, сравни с соответствующими выражениями для плотского волновода (5.19a, 5.19b) (сейчас мы учли, что постоянная распространения $\beta \approx k$).

Для фундаментальной моды со ступенчатым пространственным распределением показателя преломления аксиальная симметрия позволяет упростить (5.28l) до

$$\delta\beta = \frac{\pi \Delta \cdot a}{4k} \partial_\rho (\mathbf{H}^\perp)^2 \Big|_{\rho=a}. \quad (5.28m)$$

где относительный скачок диэлектрической проницаемости Δ определён в (5.20b). Отметим, что поправка отрицательна, $\delta\beta < 0$, поскольку производная интенсивности поля отрицательна. Этот знак соответствует направлению смещения дисперсионных кривых TM -мод относительно дисперсионных кривых TM -мод в плоском волноводе, см. Рис. 5.9. Положим, что параметр $V \sim 1$, т.е. $\kappa a, qa \sim 1$. Выражение (5.28m) позволяет оценить поправку к постоянной распространения β , связанную с неучтённым градиентом показателя преломления:

$$\frac{\delta\beta}{k} \sim \Delta^2. \quad (5.28n)$$

Мы учли, что производная оценивается как $\partial_\rho \sim \sqrt{\Delta} k$, а интенсивность нормированного поля согласно (5.28e) оценивается как $\mathbf{H}^2 \sim \Delta k^2$. Отметим, что $\beta/k - 1 \sim \Delta$, т.е. поправка, как и предполагается, относительно мала: $\delta\beta/(\beta - k) \sim \Delta$. Так и должно быть, поскольку при переходе от точного дисперсионного уравнения (5.23e) к приближённому уравнению (5.28i) была произведена замена $\varepsilon \rightarrow 1$, что как раз означает пренебрежение поправками, относительная величина которых порядка Δ .

В главном приближении поперечные компоненты поля имеют аксиально-симметричное пространственное распределение. Согласно Пункту 5-6.2.1, во-первых, есть продольные компоненты, а, во-вторых, вклад второй угловой гармоники в поперечные компоненты Найдём. Продольные компоненты E^z и H^z вычисляются непосредственно по формулам (5.22i, 5.22j). Вторую гармонику в магнитном и электрическом полях можно найти методом последовательных приближений стартуя с точного уравнения (5.21):

$$\hat{\mathcal{H}}_0 (\hat{\epsilon} \mathbf{H}^{\perp(2)}) = (\hat{\mathcal{V}} \hat{\epsilon} \mathbf{H}^{\perp(0)})^{(2)}. \quad (5.28o)$$

Справа верхний индекс ‘(2)’ означает проекцию на вторую гармонику. Вторые гармоники в магнитном и электрическом полях связаны соотношением

$$\mathbf{E}_0^{\perp(2)} = \hat{\mathbf{e}} \mathbf{H}_0^{\perp(2)} - \frac{\hat{\mathbf{e}} (\nabla_{\perp} \operatorname{div} \mathbf{H}^{\perp(0)})^{(2)}}{k^2}, \quad \mathbf{E}^{\perp(0)} = \hat{\mathbf{e}} \mathbf{H}^{\perp(0)}, \quad (5.28p)$$

где первое слагаемое получено с помощью приближённого равенства (5.27), спроектированного на вторую гармонику, второе слагаемое возникает из второго слагаемого в (5.2i) (в нём мы положили $\beta = k$, а $\varepsilon^{(0)}$ следует принять равной единице). Для нулевой гармоники полей в (5.28p) также достаточно приближения (5.27).

5-7.3 Предел слабо-связанной моды

Слабо-связанной модой назовём такую моду, у которой поток энергии сосредоточен в основном вне сердцевинны оптоволокна. Это означает, что слабо-связанной моде соответствует предел

$$\kappa a \ll 1. \quad (5.28q)$$

В частности, слабо-связанной модой является фундаментальная мода в пределе $V \ll 1$, где параметр V определён в (5.20c). Другим примером слабо-связанной моды является мода на частоте, слабо превышающей частоту отсечки этой моды.

Рассмотрим фундаментальную моду в пределе $V \ll 1$. Раскладывая детерминант (5.23e) по малому параметру (5.28q), получаем следующее приближённое выражение, определяющее связь постоянной распространения и частоты связанной моды

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{k} - 1 &= \frac{(\kappa a)^2}{2(ka)^2} = \\ &= \frac{2e^{-2\Gamma}}{(ka)^2} \exp\left(-\left(\frac{4}{V} - 1\right)\left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)\right), \end{aligned} \quad (5.28r)$$

где константа Эйлера-Маскерони $\Gamma = 0.577216$. Мы приблизили $(qa)^2 = V$, поскольку из (5.28r) видно, что κa является экспоненциально малой величиной. При выводе (5.28r) не предполагалось неравенство $\Delta \ll 1$. Если это неравенство предположить, то выражение (5.28r) не

совпадает с пределом (5.28c) при $V \ll 1$. Дело в том, что теория слабеведущих волноводов не применима в пределе $V \ll 1$, что можно увидеть, получив, что поправка (5.28l) не мала по сравнению с $\beta - k...$

5-7.4 Физические параметры некоторых типов оптоволокон

Приведём здесь физические параметры некоторых типов оптоволокон, использующихся в промышленности.

Одно-модовое волокно *Single-mode fiber*.

Диаметр сердцевинны $2a = 9$ мкм, диаметр обкладки 125 мкм. Коэффициент преломления сердцевинны $n_c = 1.480$, коэффициент преломления обкладки $n_{cl} = 1.475$, разница диэлектрических проницаемостей сердцевинны и обкладки

$$\Delta = \frac{2(n_c - n_{cl})}{n_{cl}} = 0.0068. \quad (5.29)$$

На рабочей частоте 1550 мкм затухание 0.2 Дб/км.

Многомодовое оптоволокно Радиус сердцевинны $a = 50$ мкм (или $a = 62$ мкм), радиус обкладки 125 мкм. Коэффициенты преломления те же.

5-7.5 Задачи

• **Задача 1:** Оценить для фундаментальной моды в стандартном одномодовом оптоволокну декремент ослабления поля в радиальном направлении в обкладке, а также показатель экспоненты для ослабления поля на внешней границе обкладки.

• **Задача 2:** Для одномодового оптоволокна с физическими параметрами (5.29) определить безразмерный параметр V (5.20c).

• **Задача 3:** Для аксиально симметричного волновода со ступенчатым радиальным профилем в пределе малого изменения показателя преломления выяснить (параметры даны в абзаце с формулой (5.29)), можно ли описывать дисперсию фундаментальной моды приближённым уравнением (5.28r).

§5-8. Двулучепреломление в оптоволоконках

Ранее было рассмотрено аксиально-симметричное оптоволокно. Реальные оптоволоконки имеют слабое отклонение от этой симметрии. Будем по-прежнему предполагать, что оптоволокно однородно вдоль своей оси, и рассмотрим влияние слабого нарушения аксиальной симметрии на дисперсионные свойства фундаментальной моды. Главным результатом этого влияния являет-

ся появление различия у постоянных распространения двух ортогональных линейных поляризаций. В этом параграфе мы определяем величину этой разницы в зависимости от степени нарушения аксиальной симметрии. Мы будем считать, что контраст диэлектрической проницаемости мал, $\Delta \ll 1$ в (5.20b), так что применима теория слабо ведущих волноводов, изложенная в § 5-7.

Литература: [Imoto и др., 1980], [Rashleigh, 1983].

Представим распределение диэлектрической проницаемости в виде разложения по первым трём угловым гармоникам:

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{(0)}(\rho) + \varepsilon^{(1)}(\rho) \cos(\varphi + \varphi_1) + \varepsilon^{(2)}(\rho) \cos(2\varphi). \quad (5.30a)$$

Предполагается, что $\varepsilon^{(1,2)} \ll 1$. Сразу заметим, что первая гармоника $\varepsilon^{(1)}$ в главном порядке теории возмущений в силу своей нечётности не вносит поправок в закон дисперсии. Это видно, например, из симметричных свойств вида поправки в рамках теории возмущений первого порядка, см. (5.281). Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем влияние $\varepsilon^{(2)}$ -поправки.

5-8.1 Получение поправки через вариационный принцип

Волновое уравнение можно рассматривать как седловую точку для действия. Выберем следующий вариант вида действия:

$$S = \int d^3r \left(\frac{(\partial_t \mathbf{H})^2}{c^2} - \frac{(\text{rot } \mathbf{H})^2}{\varepsilon} \right). \quad (5.30b)$$

Предполагается, что само магнитное поле $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, что гарантирует соленоидальность магнитного поля. Вариация этого действия по $\mathbf{A}$ приводит к волновому уравнению (5.2k) с заменой $k^2 \rightarrow -c^{-2} \partial_t^2$.

В (5.30b) поле предполагается действительным, однако для того, чтобы ввести понятие постоянной распространения β , надо перейти к комплексным амплитудам, имеющим зависимость по времени и продольной координате вида (5.1b). При переходе к комплексным амплитудам в действии (5.30b) надо произвести замены

$$S = \int_0^L dz \int dxdy \left(\frac{\omega^2}{c^2} |\mathbf{H}|^2 - \frac{|\text{rot } \mathbf{H}|^2}{\varepsilon} \right). \quad (5.30c)$$

Мы учли, что в (5.30c) поле не убывает на далёких расстояниях вдоль волновода, при $|z| \rightarrow \infty$, поэтому интегрирование по z производится до некоторого L , большого по сравнению с длиной волны, $\beta L \gg 1$.

Само действие (5.30b) на поле, удовлетворяющем волновому уравнению, равно нулю,

$$S = 0, \quad (5.30d)$$

в чём нетрудно убедиться следующим образом. Разделим второе слагаемое в (5.30c) на две равные половины, в которых произведём интегрирования по частям разным образом, выделив $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}^*$ соответственно. Граничные члены будут равны

$$\int dxdy \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]^z \Big|_0^L = 0, \quad (5.30e)$$

поскольку это пропорционально разности потоков энергии через плоскости $z = L$ и $z = 0$, а мода предполагается незатухающей. В оставшемся же объёмном интеграле выделяется в качестве общего множителя при $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}^*$ левая часть волнового уравнения, которая равна нулю. Таким образом, (5.30d) действительно верно.

Идея нашего вычисления поправки к постоянной распространения состоит в том, что равенство (5.30d) сохраняется при вариации параметров волновода, т.е.

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} \delta \beta + \delta S_\varepsilon = 0, \quad (5.30f)$$

где вариация действия по вариации $\delta \varepsilon$ пространственному распределению диэлектрической проницаемости

$$\delta S_\varepsilon = \int dz \frac{\omega^2}{c^2} \int dxdy \delta \varepsilon |\mathbf{E}|^2. \quad (5.30g)$$

При подсчёте вариации по β мы должны были учесть, что она происходит при сохранении условия $\text{div } \mathbf{H} = 0$, то есть H^z -компонента поля не является независимой, будучи определяемой поперечными компонентами $\mathbf{H}^\perp$ (5.2h): $\delta_\beta H^z = -(\delta \beta / \beta) H^z$. Однако вариация действия по H^z равна нулю (эта вариация не локальна в пространстве по z -направлению, однако в действии присутствуют только поперечные производные от H^z), поскольку поле удовлетворяет волновому уравнению. Далее, выполняя вариацию по β оставшихся членов, мы не должны варьировать бегущую экспоненту $\exp(i\beta z)$ в поле, поскольку она в полном выражении домножается на обратную ей экспоненту. Таки образом, существенная часть вариации по β первого вклада в (5.30c) равна нулю. Существенная часть вариации второго слагаемого равна

$$\begin{aligned} \delta S_\beta &= \frac{i\omega}{c} \int dxdy \left((\mathbf{E} \cdot \delta_\beta (\text{rot } \mathbf{H}^*)) - (\mathbf{E}^* \cdot \delta_\beta (\text{rot } \mathbf{H})) \right) = \\ &= \frac{2\omega}{c} \int dxdy \text{Re} (\mathbf{E}^{\perp*} \cdot \hat{\mathbf{e}} \mathbf{H}^\perp). \end{aligned} \quad (5.30h)$$

Равенство (5.30f) расписывается, таким образом, в виде

$$2 \delta \beta \int dxdy \text{Re} (\mathbf{E}^\perp \cdot \hat{\mathbf{e}} \mathbf{H}^{\perp*}) = \frac{\omega}{c} \int dxdy \delta \varepsilon |\mathbf{E}|^2. \quad (5.30i)$$

Эти общие вычисления годятся для любых волноводов. Соотношение (5.30i) приведено в [Imoto и др., 1980, Eq. (A6)].

Рассматривая теперь оптоволокно положим, что выполнено условие нормировки (5.2o, 5.28d). Приходим к окончательному равенству

$$\delta \beta = \frac{k}{2} \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \delta \varepsilon |\mathbf{E}|^2, \quad (5.30j)$$

В скалярном произведении в (5.30j) главная аксиально-симметричная часть поля производит нулевой вклад в окончательный ответ, так что надо выделить поправки

относительно малые как Δ . При этом сравнимые вклады производятся как поперечными, так и продольной компонентой электрического поля.

$$\delta\beta = \frac{k}{2} \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \varepsilon^{(2)} \cos(2\varphi) \left(2(\mathbf{E}^{\perp(2)} \cdot \mathbf{E}^{\perp(0)}) + |\mathbf{E}^{z(1)}|^2 \right), \quad (5.30k)$$

где индексы '(0)', '(1)' и '(2)' означают вклад от соответствующей угловой гармоники.

5-8.2 Получение поправки через теорию возмущений

Обозначим $\hat{\mathcal{H}}$ оператор в уравнении на $\mathbf{H}^\perp$ (5.2l):

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0^{(0)} + \hat{\mathcal{V}}^{(0)} + \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + \hat{\mathcal{V}}^{(2)}, \quad (5.30l)$$

где величины с верхним индексом '(0)' соответствуют невозмущённой задаче,

$$\hat{\mathcal{H}}_0^{(0)} = \Delta^\perp + \varepsilon^{(0)} k^2 - \beta^2, \quad \hat{\mathcal{V}}^{(0)} = -\mathbf{g}^{(0)} \nabla_\perp^T. \quad (5.30m)$$

а величины с верхним индексом '(2)' производятся $\varepsilon^{(2)}$ -поправкой:

$$\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} = k^2 \varepsilon^{(2)} \cos(2\varphi), \quad (5.30n)$$

$$\hat{\mathcal{V}}^{(2)} = -\mathbf{g}^{(2)} \nabla_\perp^T, \quad \mathbf{g}^{(2)} = \text{grad}(\varepsilon^{(2)} \cos(2\varphi)).$$

В выражении для $\mathbf{g}$ учёт отличия $\varepsilon^{(0)}$ был бы превышением точности. За $\mathbf{H}_0^\perp$ и β_0 обозначим магнитное поле и постоянную распространения, которые являются решением уравнения

$$(\hat{\mathcal{H}}_0^{(0)} + \hat{\mathcal{V}}^{(0)}) \hat{\mathbf{E}} \mathbf{H}_0^\perp = 0. \quad (5.30o)$$

Согласно виду скалярного произведения (5.2o), в первом порядке теории возмущений изменение постоянной распространения, связанное с асимметрией волновода, определяется выражением

$$\delta\beta = \frac{1}{2\beta} \int dx dy \left(\mathbf{E}_0^\perp \cdot (\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + \hat{\mathcal{V}}^{(2)}) \hat{\mathbf{E}} \mathbf{H}_0^\perp \right), \quad (5.30p)$$

где $\mathbf{E}_0^\perp$ связано с $\mathbf{H}_0^\perp$ согласно (5.2i). (Ещё раз обратим внимание, что если бы мы в (5.30p) вместо $\varepsilon^{(2)}$ подставили $\varepsilon^{(1)}$ -поправку из (5.30a), то получили бы нуль.) Напомним, что магнитное поле в (5.30p) должно быть нормировано на единицу. В пределе слабо-ведущего волновода это означает, что должна выполняться нормировка (5.28e). Поскольку имеются две поляризации, то они должны быть выбраны так, чтобы в их базисе возмущение $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + \hat{\mathcal{V}}^{(2)}$ имело диагональный вид; иначе помимо диагональных элементов (5.30p) пришлось бы также рассматривать и недиагональные элементы. Ниже

будет видно, что по соображениям симметрии недиагональные элементы оказываются равными нулю, если в качестве базисных поляризаций выбраны линейные поляризации вдоль x - и y -осей.

Рассмотрим структуру первого слагаемого в (5.30p), производимого $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$. Поперечные компоненты электромагнитного поля содержат как нулевую гармонику (найденную выше в рамках приближения слабо ведущего волновода), так и относительно слабую (имеющую порядок Δ) вторую гармонику:

$$\mathbf{H}_0^\perp = \mathbf{H}_0^{\perp(0)} + \mathbf{H}_0^{\perp(2)}, \quad \mathbf{E}_0^\perp = \mathbf{E}_0^{\perp(0)} + \mathbf{E}_0^{\perp(2)}. \quad (5.30q)$$

Первое слагаемое в (5.30p) поэтому есть

$$\delta\beta_1 = \frac{k}{2} \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \varepsilon^{(2)} \cos(2\varphi) \left((\mathbf{E}_0^{\perp(2)} \cdot \hat{\mathbf{E}} \mathbf{H}_0^{\perp(0)}) + (\mathbf{E}_0^{\perp(0)} \cdot \hat{\mathbf{E}} \mathbf{H}_0^{\perp(2)}) \right), \quad (5.30r)$$

Теперь обратимся ко второму слагаемому в (5.30p). В электрическом и магнитном полях следует удерживать только нулевые гармоники, так что

$$\delta\beta_2 = -\frac{1}{2k} \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\hat{\mathbf{E}} \mathbf{H}^{\perp(0)} \cdot \text{grad}(\varepsilon^{(2)} \cos(2\varphi)) \right) \text{div}(\hat{\mathbf{E}} \mathbf{H}^{\perp(0)}). \quad (5.30s)$$

Возьмём сумму обоих вкладов. В процессе выкладок учтём, что с нашей точностью $\Delta^\perp \mathbf{H}_0^{\perp(0)} = (\beta^2 - k^2) \mathbf{H}_0^{\perp(0)}$, и связь (5.2j) z -компоненты электрического поля с поперечными компонентами магнитного поля. В результате придём к выражению (5.30k).

5-8.3 Задачи

• **Задача 1:** Пусть распределение диэлектрической проницаемости в оптоволокне имеет ступенчатый вид. У оптоволокна имеется слабая асимметрия, так что поперечное сечение сердцевинки имеет не строго круглую форму, а эллиптическую с малым эксцентриситетом $e = 0.03$. Средний радиус сердцевинки равен $a = 4.5$ мкм, коэффициент преломления $n = 1.48$, а разность $\Delta = 0.004$ (5.20b), на несущей частоте сигнала длина волны в пустоте $\lambda_0 = 1.5$ мкм. Отталкиваясь от вида поправки к скорости распространения (5.30j), оцените длину L_{BL} , на которой одна поляризация обгоняет другую на одну длину волны. *Указание:* Сначала установите функциональную зависимость L_{BL} от параметров оптоволокна, потом произведите численный расчёт.

§5-9. Поверхностные плазмоны

Рассмотрим распространение электромагнитной волны вдоль границы раздела металл-диэлектрик (Raether [1988], а также Ландау и Лифшиц [1987, задача после §88]) на частотах, близких к плазменной частоте в красной от неё области.

Введём декартову систему координат $Oxyz$. Пусть область, занимаемая металлом задаётся неравенством $z < 0$. Для определённости примем, что электромагнитная волна распространяется вдоль оси Ox . Тогда все поля при $z > 0$ содержат множитель

$$\begin{aligned} \text{при } z < 0 \quad & \exp(i\beta x + \kappa_m z - i\omega t), \\ \text{при } z > 0 \quad & \exp(i\beta x - \kappa_d z - i\omega t), \end{aligned} \quad (5.31a)$$

где действительные части пространственных декрементов затухания κ_m и κ_d положительны. Волновое уравнение, записанное в областях с однородным электромагнитным откликом, даёт связи

$$\beta^2 - \kappa_m^2 = \frac{\varepsilon_m \omega^2}{c^2}, \quad \beta^2 - \kappa_d^2 = \frac{\varepsilon_d \omega^2}{c^2}. \quad (5.31b)$$

Ниже мы выясним, что электрическое поле нормально оси Oy , а магнитное поле имеет только y -компоненту. Таким образом, поверхностный плазмон есть TM -волна. Всего мы имеем 6 неизвестных: κ_m , κ_d , q и 4=(2 области)×(2 компоненты) компонент электрического поля. На эти величины наложено 2 условия (5.31b), вытекающие из волнового уравнения в объёме, и 4 условия на границе (непрерывность касательных компонент $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, а также нормальных компонент $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$), т.е. всего 5 условий. Таким образом, существует не более чем 6-5=1 направленная мода.

Удовлетворяя вышеперечисленным граничным условиям, приходим к тому, что

$$\kappa_m^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_m^2}{\varepsilon_d + \varepsilon_m}, \quad \kappa_d^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_d^2}{\varepsilon_d + \varepsilon_m}, \quad (5.31c)$$

что не противоречит условию связанности волны поверхностью раздела, — т.е. затуханию волны в обе стороны от поверхности, — если выполнено неравенство

$$\operatorname{Re}(\varepsilon_m/\varepsilon_d) < -1. \quad (5.31d)$$

Постоянная распространения

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_d \varepsilon_m}{\varepsilon_d + \varepsilon_m} = \kappa_m \kappa_d. \quad (5.31e)$$

Электрическое поле поверхностной моды лежит в плоскости, перпендикулярной оси Oy . Если отбросить множители (5.31a), дающие зависимость от координат, то электрическое поле оказывается равным

$$\begin{aligned} \text{при } z > 0 \quad & \mathbf{E}_0 = \{1, 0, i\beta/\kappa_d\}, \\ \text{при } z < 0 \quad & \mathbf{E}_0 = \{1, 0, -i\beta/\kappa_m\}, \end{aligned} \quad (5.31f)$$

Магнитное поле

$$\mathbf{H}_0 = \left(0, -i\frac{\varepsilon_d \omega}{c \kappa_d}, 0\right). \quad (5.31g)$$

Слабо связанные плазмоны. Плазмон является слабо связанным с поверхностью, если он оказывается локализованным в поперечном направлении на масштабе, значительно превышающем длину волны света в диэлектрике, т.е. когда

$$\frac{\kappa_d}{\omega/c} \ll 1, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_m} \ll 1.$$

Из (5.31c) следует, что такой предел достигается, когда диэлектрическая проницаемость металла становится относительно большой по абсолютному значению.

В пределе слабо связанных поверхностных волн имеет смысл переписать уравнение дисперсии в терминах поверхностного импеданса ζ (4.5b): согласно его определению,

$$\zeta = \frac{E^x}{B^y} = \frac{i\varepsilon_d(\omega/c)}{\kappa_d}. \quad (5.31h)$$

В этом пределе электрическое поле поверхностного плазмона вне металла в основном направлено нормально к его поверхности, так что

$$\frac{E^x}{E^z} \approx \frac{i(\omega/c)}{\kappa_d} \ll 1. \quad (5.31i)$$

Пространственное распределение поля в плазмоне стремится к пространственному распределению поля в плоской линейно поляризованной по Oz волне.

Предел коротких волн. Их выражений (5.31c) для волновых векторов следует, при приближении к точке $\operatorname{Re} \varepsilon_m = -\operatorname{Re} \varepsilon_d$ величина волнового вектора q , и декрементов пространственного ослабления κ_d , κ_m начинает возрастать.

5-9.1 Дисперсия плазмонов в модели Друде

Исследуем зависимость пространственной структуры поверхностных плазмонов и их добротности от частоты, приняв простейшие модели для дисперсий диэлектрических проницаемостей. Пренебрежём диссипативными потерями в диэлектрике, так что проницаемость диэлектрика примем чисто действительной, $\operatorname{Im} \varepsilon_d = 0$. Дисперсия диэлектрической проницаемости металла

$$\varepsilon_m = \varepsilon_b - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)}, \quad (5.32a)$$

где чисто действительный вклад $\varepsilon_b - 1$ происходит от резонансов, имеющих частоты, далёкие от интересной нам частоты ω_0 .

• **Задача 1:** Рассмотрите распространение поверхностного плазмона вдоль бесконечной плоской границы металл-диэлектрик. Проницаемость диэлектрической среды считать единицей. Проницаемость металлической среды имеет вид (5.31b) с $1/\tau \ll \omega_p$.

- Определите условие существования поверхностных плазмонных мод в терминах модели (5.32a).
- Определите пороговую частоту и закон дисперсии коротковолновых плазмонов.
- Определите пространственную структуру электромагнитного поля в плоской поверхностно-плазмонной волне, для простоты предполагая отсутствие потерь, $\varepsilon'' = 0$.
- Определите пространственную структуру плотности потока энергии в плоской поверхностно-плазмонной волне, предполагая потери малыми, но не нулевыми (волна возбуждается на некоторой плоскости, нормальной к плоскости раздела металл-диэлектрик, и распространяется от неё). Найдите полный поток энергии в каждой из двух сред, и, наконец, полный поток энергии по всему сечению.

Решение: Дисперсию найдем, используя соотношение (5.31c):

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_d(\omega_p^2 - \varepsilon_b \omega^2)}{\omega_p^2 - (\varepsilon_d + \varepsilon_b)\omega^2}}. \quad (5.32b)$$

Пороговая частота (5.31d)

$$\omega_0 = \frac{\omega_p}{\sqrt{\varepsilon_d + \varepsilon_b}} \gg \frac{1}{\tau}, \quad (5.32c)$$

Пусть частота плазмона ω близка к пороговой частоте ω_0 . Тогда дисперсионное соотношение приближённо может быть записано в виде

$$\beta^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} \frac{\varepsilon_d^2}{2(\varepsilon_d + \varepsilon_b)} \frac{\omega_p}{\omega - \omega_0 + i/2\tau} \quad (5.32d)$$

а обратные размеры поперечной локализации $\kappa_d \approx \kappa_m \approx \beta$.

Согласно выражению (3.33c) для потока энергии, его x -компонента равна

$$S^x = -\frac{c}{2\pi} \operatorname{Re} (E^z H^{y*}) \quad (5.32e)$$

Воспользовавшись (5.31f, 5.31g), получаем, что в диэлектрике интегральный поток энергии вдоль направления распространения

$$S^{x(d)} = \frac{c|H_0|^2}{2\pi} \frac{\beta \kappa_d / \varepsilon_d}{\omega/c} \frac{1}{\kappa_d} e^{-2\kappa_d z} \Rightarrow \quad (5.32f)$$

$$I^{(d)} = \int_0^\infty dx S^{x(d)} = \frac{c|H_0|^2}{4\pi} \frac{\beta \kappa_d / \varepsilon_d}{\omega/c} \frac{1}{\kappa_d^2}.$$

В металле интегральный поток энергии вдоль направления распространения

$$S^{x(m)} = -\frac{c|H_0|^2}{2\pi} \frac{\beta \kappa_d / \varepsilon_d}{\omega/c} \frac{1}{\kappa_m} e^{-2\kappa_m z} \Rightarrow \quad (5.32g)$$

$$I^{(m)} = \int_0^\infty dx S^{x(m)} = -\frac{c|H_0|^2}{4\pi} \frac{\beta \kappa_d / \varepsilon_d}{\omega/c} \frac{1}{\kappa_m^2}.$$

направлен в противоположную сторону. Суммарный поток энергии в x -направлении

$$I = I^{(d)} + I^{(m)} = \frac{c|H_0|^2}{4\pi} \frac{(\kappa_m^2 - \kappa_d^2) \kappa_d / \varepsilon_d}{\beta^3 \omega / c} =$$

$$= \frac{\omega}{\beta} \frac{|H_0|^2}{4\pi} \frac{(\varepsilon_d - \varepsilon_m) \sqrt{-\varepsilon_m - \varepsilon_d}}{-\varepsilon_m \varepsilon_d (\omega/c)}. \quad (5.32h)$$

• **Задача 2:** Рассмотреть границу раздела металла и диэлектрической среды, имеющих коэффициенты диэлектрической проницаемости ε_m и ε_d соответственно, так что $\varepsilon_m < -\varepsilon_d$, а $\varepsilon_d > 0$ (при этом потери в обоих материалах отсутствуют). Выразить поверхностную плотность энергии $\mathcal{E}$ в плоском поверхностном плазмоне через амплитуду электрического поля на поверхности раздела и диэлектрические проницаемости соприкасающихся сред. То же самое сделать для потока энергии отдельно в каждой среде и в целом. Непосредственно показать, что

$$v_g \mathcal{E} = I, \quad v_g = \frac{d\omega}{d\beta},$$

где I — полная поверхностная плотность потока энергии, v_g — групповая скорость, а $\beta(\omega)$ — закон дисперсии поверхностного плазмона.

• **Задача 3:** Пусть теперь в металле присутствуют малые потери, так что $\varepsilon_m'' \ll |\varepsilon_m'|$. Введём декартову систему координат $Oxyz$, в которой поверхность раздела есть плоскость Oxy . Пусть поверхностный плазмон возбуждается синфазным движением сторонних зарядов с частотой ω в плоскости Oyz , тогда при $x > 0$ возбуждённая плоская поверхностная волна распространяется в направлении возрастающих x . Найти распределение среднего по времени потока энергии в пространстве. Нарисовать соответствующую картину в плоскости Oxz .

Глава 6

ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§6-1. Магнитное поле постоянных токов

Пусть в пространстве имеется некоторое распределение электрического тока в пространстве $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. Это распределение постоянно во времени и не приводит к образованию неоднородностей в распределении электрического заряда, так что

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (6.1a)$$

В некоторых случаях мы будем полагать, что распределение тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ есть результат протекания тока амплитуды J по некоторому контуру. Поле магнитной индукции $\mathbf{B}$ связано с током уравнением Максвелла (1.6a):

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (6.1b)$$

Введём также вектор-потенциал $\mathbf{A}$, так что $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, удовлетворяющий калибровке $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Тогда уравнение на вектор-потенциал есть уравнение Пуассона,

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j}(\mathbf{r}'). \quad (6.1c)$$

Посчитаем энергию U_L , связанную с возбуждённым током. Мы полагаем, что все среды не обладают магнитными свойствами. Тогда полная энергия равна

$$U_L = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B}^2 d^3 r. \quad (6.1d)$$

С другой стороны, поскольку связь между магнитным полем и током (6.1b) линейна, то магнитную энергию можно представить также в виде

$$U_L = \frac{LJ^2}{2c^2} \quad (6.1e)$$

Индуктивность контура L определяется его геометрическими характеристиками.

Для того, чтобы найти L по геометрии контура, преобразуем выражение (6.1d) следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \mathbf{B}^2 &= \frac{1}{8\pi} \int d^3 r (\mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}) = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \operatorname{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] + \frac{1}{8\pi} \int d^3 r (\mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (6.1f)$$

где $\mathbf{A}$ – вектор-потенциал, $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Интеграл от дивергенции исчезает, а во втором слагаемом пользуемся уравнениями Максвелла (6.1b) и решением для вектор-потенциала (6.1c):

$$U_L = \frac{1}{2c^2} \int d^3 r_1 d^3 r_2 \frac{(\mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}_2))}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \quad (6.1g)$$

Сравнивая это выражение с определением индуктивности (6.1e), заключаем, что

$$L = \frac{1}{J^2} \int d^3 r_1 d^3 r_2 \frac{(\mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}_2))}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \quad (6.1h)$$

6-1.1 Задачи

• **Задача 1:** Найти погонную индуктивность L для коаксиального кабеля, которая связывает ток J по внешней обкладке и поток Φ поля магнитной индукции в азимутальном направлении, $\Phi = LJ/c$. Внутренняя обкладка имеет внешний радиус a , внешняя обкладка имеет внутренний радиус b . Пространство между обкладками заполнено средой с магнитной восприимчивостью μ .

Решение: Введём цилиндрическую систему координат $\{r, \phi, z\}$. Поле магнитной индукции можно представить в виде $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, где у вектор-потенциала единственной компонентой является A^z . Уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$ есть уравнение Лапласа $\Delta A^z = 0$. Поскольку распределение поля A^z аксиально симметрично, то решением уравнения Лапласа является

$$A^z = \frac{LJ}{c \ln(b/a)} \ln r, \quad H^\phi = \frac{B^\phi}{\mu} = \frac{LJ}{c r \ln(b/a)}, \quad (6.2a)$$

$$\Phi = \int_a^b dr B^\phi = \frac{LJ}{c}. \quad (6.2b)$$

Из граничного условия (1.10a) следует, что

$$H^\phi \Big|_{r=b} = \frac{4\pi J}{2\pi b c}, \quad L = 2\mu \ln(b/a). \quad (6.2c)$$

Сравни с выражением для ёмкости цилиндрического конденсатора (2.7c).

§6-2. Магнитостатика

Пусть среда обладает ненулевой плотностью магнитного момента (намагниченностью) $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, а ток свободных зарядов $\mathbf{j}_{\text{ext}}$ отсутствует. Тогда уравнения Максвелла (1.9a, 1.9d) в отсутствие внешних источников в статическом пределе (уравнения магнитостатики) имеют вид:

$$\text{div } \mathbf{B}_M = 0, \quad \text{rot } \mathbf{B}_M = 4\pi \text{rot } \mathbf{M}. \quad (6.3a)$$

Здесь $\mathbf{B}_M(\mathbf{r})$ — индукция магнитного поля. Обычно уравнения магнитостатики применяют для ситуаций, когда исследуемые эффекты происходят на масштабах, существенно превышающих межатомные расстояния в среде. В этом случае можно считать и намагниченность $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, и поле $\mathbf{B}_M(\mathbf{r})$ усреднёнными по флуктуациям на молекулярных масштабах. Согласно определению (1.8), магнитное поле

$$\mathbf{H}_M = \mathbf{B}_M - 4\pi\mathbf{M}. \quad (6.3b)$$

Как следствие уравнений (6.3a), магнитное поле удовлетворяет уравнениям

$$\text{rot } \mathbf{H}_M = 0, \quad \text{div } \mathbf{H}_M = -4\pi \text{div } \mathbf{M}. \quad (6.3c)$$

то есть, в частности, является потенциальным:

$$\mathbf{H}_M = -\text{grad } \phi_M, \quad (6.3d)$$

где ϕ_M — скалярное поле. Определение потенциала магнитного поля по данному распределению намагниченности сводится к решению уравнения Пуассона:

$$\Delta \phi_M = 4\pi \text{div } \mathbf{M}. \quad (6.3e)$$

Полное поле магнитной индукции есть сумма поля $\mathbf{B}_M$, наведённого образцом и определяющегося потенциалом (6.3e), и внешнего поля $\mathbf{B}_{\text{ext}}$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_M + \mathbf{B}_{\text{ext}}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}. \quad (6.3f)$$

6-2.1 Магнитная энергия

В магнитных материалах намагниченность $\mathbf{M}$ является в общем случае независимой от магнитного поля $\mathbf{H}$ величиной. Её следует воспринимать как параметр порядка. Поэтому свободная энергия зависит от как от $\mathbf{H}$, так и от $\mathbf{M}$:

$$F = F(\mathbf{M}, \mathbf{H}). \quad (6.4a)$$

Отметим, что в качестве термодинамического потенциала мы выбираем именно потенциал (1.12i), поскольку зафиксировав $\mathbf{M}$, мы зафиксировали токи в образце. Потенциал же (1.12i), соответственно, является функцией внешних токов, а не потенциалов. При этом значение свободной энергии при нулевом значении магнитной индукции $F(\mathbf{M}, 0)$ есть часть энергии кристаллической решётки, запасённая в конфигурации магнитных

моментов. Согласно (1.12i), вариация

$$\frac{\delta F}{\delta \mathbf{H}} = -\frac{\mathbf{B}}{4\pi}. \quad (6.4b)$$

Мы можем проинтегрировать это уравнение по магнитной индукции при постоянной намагниченности и получить

$$F(\mathbf{M}, \mathbf{H}) = F(\mathbf{M}, 0) + F_m, \quad (6.4c)$$

$$\begin{aligned} F_m &= - \int_0^{\mathbf{H}} \frac{(\mathbf{H}' + 4\pi\mathbf{M}) d\mathbf{H}'}{4\pi} = \\ &= - \int \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} d^3r - \int (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) d^3r. \end{aligned}$$

Отметим, что F_m (6.4c) можно переписать в виде

$$F_m = \int \left(\frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{M}) - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}})}{4\pi} \right) d^3r - 2\pi \int \mathbf{M}^2 d^3r. \quad (6.4d)$$

Первое слагаемое в круглой скобке (6.4d) есть энергия магнитного поля, второе слагаемое — энергия образца в магнитном поле, а третье слагаемое — энергия взаимодействия магнитного поля со внешними источниками. Последнее, отдельно стоящее слагаемое в (6.4d), зависит только от величины магнитного момента и может быть ассоциировано с $F(\mathbf{M}, 0)$. Будучи интерпретирована как просто энергия, F_m (6.4d) непосредственно может быть получено следующим образом, если стартовать с уравнения (3.34b) для изменения локальной плотности энергии. Пусть $\mathbf{j}_{\text{ext}} = c \text{rot } \mathbf{M}_{\text{ext}}$; поле $\mathbf{M}_{\text{ext}}$ можно ввести всегда, поскольку ток $\mathbf{j}_{\text{ext}}$ бездивергентен. В выражении (3.34b) вместо магнитного поля $\mathbf{H}$ надо использовать вектор $\mathbf{H} - 4\pi\mathbf{M}_{\text{ext}}$. Напомним, кроме того, что интегрирование в (6.4d) происходит по всему пространству, включая область с ненулевым $\mathbf{M}_{\text{ext}}$. Таким образом, изменение энергии во всём объёме при нарастании поля магнитной индукции на $d\mathbf{B}$ равно

$$\begin{aligned} F_m + 2\pi \int \mathbf{M}^2 d^3r &= \\ &= \int d^3r \int_0^{\mathbf{B}} \frac{(\mathbf{H}' - 4\pi\mathbf{M}_{\text{ext}}) d\mathbf{B}'}{4\pi} = \\ &= \int d^3r \int_0^{\mathbf{B}} \frac{(\mathbf{B}' - 4\pi\mathbf{M} - 4\pi\mathbf{M}_{\text{ext}}) d\mathbf{B}'}{4\pi}. \quad (6.4e) \end{aligned}$$

В ходе выкладок следует воспользоваться равенством, аналогичным (6.4i), но написанным для $\mathbf{H}_{\text{ext}}$. Обратим лишний раз внимание на то, что в определении (6.3f)

магнитного поля $\mathbf{H}$, фигурирующего в (6.4с), намагниченность источника не входит, тогда как в (6.4е) понадобилось вычитание из поля магнитной индукции этой намагниченности.

Ради общего понимания укажем, что, согласно (1.12и), свободную энергию $F(\mathbf{M}, \mathbf{H})$ (6.4с) можно воспринимать и как $F(\mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{B}_{\text{ext}})$. Вариация

$$\frac{\delta F(\mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{B}_{\text{ext}})}{\delta \mathbf{A}} = 0, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (6.4f)$$

приводит к уравнениям (6.3а, 6.3f) на магнитное поле. Распределение намагниченности соответствует (локальному) минимуму свободной энергии, то есть для определения распределения намагниченности в пространстве надо решить уравнение

$$\frac{\delta F(\mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{B}_{\text{ext}})}{\delta \mathbf{M}} = 0. \quad (6.4g)$$

Здесь поле магнитной индукции $\mathbf{B}$ может быть как уже определено посредством уравнений (6.3а, 6.3f), так и оставаться пока ещё неопределённым.

Вычтем теперь из полной магнитной части свободной энергии F_m её значение F_{m0}

$$F_{m0} = - \int \frac{\mathbf{B}_{\text{ext}}^2}{8\pi} d^3r \quad (6.4h)$$

в отсутствии образца. В общем виде эта разность рассматривалась в (1.12к). Воспользовавшись тождеством

$$\int (\mathbf{H}_M \cdot \mathbf{B}) d^3r = - \int (\text{grad } \phi_M \cdot \mathbf{B}) d^3r = 0, \quad (6.4i)$$

получим выражение для искомой разницы:

$$F_m - F_{m0} = \int \left(\frac{\mathbf{H}_M^2}{8\pi} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}) \right) d^3r. \quad (6.4j)$$

Как видим, энергия взаимодействия с внешним полем $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ входит аддитивно, что ввиду фиксации поля намагниченности $\mathbf{M}$ согласуется с (1.12л). Если нет внешнего магнитного поля, то справа интеграл берётся от существенно положительной величины, поэтому минимизация свободной энергии (6.4g) требует минимизации среднеквадратичного значения части магнитного поля $\mathbf{H}_M$, индуцированного образцом.

6-2.2 Одноосные ферромагнетики

В ферромагнетике при температуре, существенно меньшей температуры Кюри, амплитуда намагниченности фиксирована, $|\mathbf{M}| = M_0$. Однако её направление не является наперёд заданной величиной и определяется (локальным) минимумом свободной энергии.

Образование доменной структуры обусловлено компромиссом между различными составляющими полной энергии образца. Существует широкая область условий, в которых требование минимизации энергии ведет

к распаду ферромагнетика на участки с различными направлениями вектора намагниченности $\mathbf{M}$. Намагниченность внутри доменов почти однородна, а переход от одного направления к другому происходит плавно и главным образом в пределах пограничного слоя - доменной стенки. Толщина областей перехода обычно мала по сравнению с размерами доменов. С термодинамической точки зрения соприкасающиеся домены представляют собой различные фазы ферромагнетика и имеет смысл к примеру говорить о поверхностном натяжении межфазных границ.

Зададимся целью определить пространственную структуру намагниченности при переходе между соседними доменами. Поскольку искомая зависимость диктуется условиями термодинамического равновесия, то необходимо прежде всего записать выражение для полной свободной энергии ферромагнетика. Эта величина складывается из энергии магнитной анизотропии (на микроскопическом уровне обусловленной слабыми релятивистскими взаимодействиями между атомами ферромагнетика) и энергии магнитной неоднородности (главный вклад в которую дает обменное взаимодействие).

Спин-орбитальное взаимодействие в кристаллах приводит к “привязке” намагниченности к кристаллическим осям — магнитной анизотропии. Простейшим и достаточно распространённым является одноосная анизотропия, выражаемая в следующей модификации магнитного гамильтониана:

$$F - F_{m0} = \int \left(\frac{\mathbf{H}_M^2}{8\pi} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}) \right) d^3r - \frac{\beta}{2} \int M_z^2 d^3r, \quad (6.5)$$

где M_z — компонента намагниченности вдоль оси анизотропии z . В равновесии при $\beta > 0$ однородная намагниченность $\mathbf{M}_0$ выстраивается параллельно оси z . В этом случае о ферромагнетике говоря, что он относится к типу “лёгкая ось”, а ось Oz называется направлением лёгкого намагничивания. В случае $\beta < 0$ тип ферромагнетика называется “лёгкая плоскость”. Выражение (6.5) учитывает первые члены разложения энергии анизотропии в ряд по компонентам вектора $\mathbf{M}$. Начинается это разложение с квадратичных членов, поскольку энергия анизотропии есть чётная функция намагниченности (энергия инвариантна по отношению к обращению времени, а намагниченность меняет знак при этой операции). С точностью до постоянных вкладов, пропорциональных объёму образца и квадрату намагниченности часть объёмной плотности энергии, связанная с анизотропией, может быть записана в виде

$$U_{\text{ан}} = \frac{\beta M_0^2}{2} \sin^2 \theta \quad (6.6)$$

где θ — угол между $\mathbf{M}$ и главной осью симметрии кристалла z .

Стремление системы к уменьшению модуля $\mathbf{H}_M$ является причиной образования доменной структуры. Если при направлении $\mathbf{M}$ вдоль оси анизотропии z поле

$\mathbf{H}_M$ оказывается равным нулю (такое может случиться при цилиндрической геометрии образца), то доменов не образуется. То же происходит при достаточно сильном внешнем поле $\mathbf{B}_{\text{ext}}$.

Энергия неоднородности ферромагнетика феноменологически может быть записана через производные $\mathbf{M}$ по координатам. При этом предполагается относительная малость градиента направления вектора $\mathbf{M}$, поскольку существенное изменение направления магнитных моментов происходит на расстояниях больших по сравнению с межатомными. Разложение энергии неоднородности начинается с квадратичных членов по пространственным производным магнитного момента

$$U_{\text{неодн}} = \frac{1}{2} \alpha_{ik} \frac{\partial M_i}{\partial x_i} \frac{\partial M_l}{\partial x_k} \quad (6.7)$$

Наличие членов линейных по производным запрещено в силу требования инвариантности энергии по отношению к операции обращению времени. В одноосном кристалле тензор α_{ik} имеет две независимые компоненты, поэтому в выбранной системе координат

$$U_{\text{неодн}} = \frac{\alpha_{\perp}}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\alpha_{\parallel}}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right)^2. \quad (6.8)$$

6-2.2.1 Доменная стенка

Покажем теперь, что в одноосном кристалле реализуется доменная структура в виде плоских слоев, параллельных главной оси симметрии ("легкой оси") и поворот намагниченности при этом происходит в плоскости границы между слоями (блоховская доменная стенка). Направим ось x по нормали к плоскости слоев. Мы ищем решение, в котором распределение намагниченности зависит только от координаты x и для компонент вектора $\mathbf{M}$ справедливо

$$M_x = 0, \quad M_y = M_0 \sin \theta, \quad M_z = M_0 \cos \theta. \quad (6.9)$$

Тогда сумма поверхностной плотности энергий анизотропии и однородности может быть записана как

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx (U_{\text{ан}} + U_{\text{неодн}}) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\alpha_{\perp}}{2} (M_y'^2 + M_z'^2) + \frac{\beta}{2} M_y'^2 \right] = \\ &= \frac{M_0^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx [\alpha_{\perp} \theta'^2 + \beta \sin^2 \theta] \end{aligned} \quad (6.10)$$

где штрих "′" означает дифференцирование по x . Бесконечные пределы интегрирования выбраны в связи с предположением о малости ширины переходной области

по сравнению с толщиной доменов. По этой же причине можно записать следующие граничные условия

$$\theta(+\infty) = 0, \quad \theta(-\infty) = \pi, \quad \frac{d\theta}{dx}(\pm\infty) = 0.$$

Решая вариационную задачу о минимизации полученного функционала, приходим к уравнению

$$\alpha_{\perp} \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \beta \sin \theta \cos \theta = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\cos \theta = \tanh(x/\delta), \quad (6.11)$$

где величину размерности дыны $\delta = \sqrt{\alpha_{\perp}/\beta}$ следует называть шириной доменной стенки.

Выполняя интегрирование в выражении для энергии с учётом найденного распределения намагниченности, находим

$$W = 2M_0^2 \beta \delta = 2M_0^2 \sqrt{\alpha_{\perp} \beta} \quad (6.12)$$

6-2.3 Задачи

• **Задача 1:** Найти поле $\mathbf{B}$ для точечного диполя $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mu \delta(\mathbf{r})$.

• **Задача 2:** Найти поля $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ для шара с однородной намагниченностью: $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}_0$, $r < R$, $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = 0$, $r > R$. Найти поля во всем пространстве (внутри и вне шара).

• **Задача 3:** Найти поля $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ для бесконечного цилиндра с однородной намагниченностью $\mathbf{M}_0$ вдоль и поперек оси цилиндра.

• **Задача 4:** Найти поля $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ для бесконечной пластины с однородной намагниченностью $\mathbf{M}_0$ вдоль и поперек плоскости пластины.

• **Задача 5:** Доказать теорему взаимности: если поле $\mathbf{B}_1(\mathbf{r})$ создаётся намагниченностью $\mathbf{M}_1(\mathbf{r})$ и поле $\mathbf{B}_2(\mathbf{r})$ — намагниченностью $\mathbf{M}_2(\mathbf{r})$, то:

$$\int \mathbf{M}_1 \mathbf{B}_2 d\mathbf{r} = \int \mathbf{M}_2 \mathbf{B}_1 d\mathbf{r}. \quad (6.13)$$

• **Задача 6:** Внутри шара радиуса R с однородной намагниченностью $\mathbf{M}_0$ вырезали шаровую же область радиуса $a < R$, в которой вектор намагниченности повернули на некоторый угол θ по отношению к $\mathbf{M}_0$, сохранив его модуль. Найти изменение магнитной энергии за счет поворота, считая расположение области внутри шара произвольным.

• **Задача 7:** В условиях предыдущей задачи разворот намагниченности был осуществлен в двух неперекрывающихся шаровых областях. Найти изменение магнитной энергии, задав параметры областей и изменения намагниченности.

• **Задача 8:** Найти пороговое значение $\mathbf{B}_0$, направленного перпендикулярно плоскости ферромагнитной пластины, выше которого образование доменов энергетически невыгодно.

Часть I

ПРИЛОЖЕНИЯ

Глава 7

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОГО ОТКЛИКА И
ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

§7-1. Обобщённая восприимчивость

Пусть на некоторую систему, находящуюся в тепловом равновесии, действует возмущение, создаваемой внешними источниками. Добавка в гамильтониан от возмущения даётся квантово-механическим оператором

$$\hat{V}(t) = -\hat{x}f(t), \quad (7.1a)$$

где $\hat{x}$ – оператор, соответствующий некоторой наблюдаемой величине в системе, а $f(t)$ – внешняя “сила”, зависящая от времени и характеризующая внешнее воздействие на систему. Если сила мала, то есть производит малое воздействие на систему, то среднее значение величины $x(t)$ линейно по этой силе,

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \alpha(t-t') dt' f(t'). \quad (7.1b)$$

В (7.1b) интегрирование производится только по временам $t' < t$, что гарантирует выполнения принципа причинности. Доопределим восприимчивость $\alpha(\tau)$ на отрицательные времена, положив $\alpha(\tau < 0) = 0$, тогда интегрирование по времени в (7.1b) можно распространить на все времена t' .

Монохроматическую силу f можно представить в виде

$$f(t) = f_{\omega} e^{-i\omega t} + f_{\omega}^* e^{i\omega t}. \quad (7.1c)$$

Для определённости полагаем, что частота положительна, $\omega > 0$. Если сила f не монохроматическая, но имеет некоторый спектр, то она может быть представлена в виде интеграла Фурье,

$$f(t) = \int (d\omega) f_{\omega} e^{-i\omega t}, \quad (7.1d)$$

При этом разумно предположить, что во временном представлении сила действует в течении некоторого времени τ_f .

В Фурье-представлении связь между средним значением x и силой f_{ω} имеет вид

$$x_{\omega} = \alpha_{\omega} f_{\omega}, \quad (7.1e)$$

где α_{ω} определяется равенством

$$\alpha(t) = \int (d\omega) \alpha_{\omega} e^{-i\omega t}. \quad (7.1f)$$

Из того, что во временном представлении восприимчивость является чисто действительной функцией следует симметрия её действительной и мнимой частей в частотном представлении,

$$\alpha'(-\omega) = \alpha'(\omega), \quad \alpha''(-\omega) = -\alpha''(\omega). \quad (7.1g)$$

В частности, на мнимой оси восприимчивость чисто действительна,

$$\alpha(i\omega) = \alpha'(i\omega), \quad \omega > 0. \quad (7.1h)$$

Подвижность. Пусть в (7.1a) сила f не зависит от времени. Для определённого класса систем (например, проводники в электродинамике или частица в жидкости) при постоянной силе среднее значение координаты растёт линейно со временем,

$$\frac{dx}{dt} = \mu f, \quad (7.1i)$$

где постоянная μ называется подвижностью (в электродинамике она пропорциональна проводимости). Подвижность определяет поведение восприимчивости на малых частотах $\omega \rightarrow 0$:

$$\alpha \approx \frac{i\mu}{\omega + i0} : \quad \alpha' \approx \pi\mu\delta(\omega), \quad \alpha'' = \frac{\mu}{\omega}. \quad (7.1j)$$

7-1.1 Диссипация энергии в системе и энергия колебаний

Мгновенная выделяющаяся мощность в системе

$$\partial_t W = -x\dot{f}, \quad (7.2)$$

7-1.1.1 Диссипация энергии

Если сила гармоническая во времени, см. (7.1c), то средняя по времени выделяющаяся мощность $\partial_t W$ (7.2) есть скорость производства тепла Q . После усреднения по времени, большому по сравнению с периодом колебания силы $2\pi/\omega$, получим

$$\begin{aligned} Q &= \alpha_\omega |f_\omega|^2 i\omega - \alpha_\omega^* |f_\omega|^2 i\omega = \\ &= 2\omega \alpha''_\omega |f_\omega|^2. \end{aligned} \quad (7.3a)$$

Таким образом, диссипация определяется мнимой частью восприимчивости.

Поскольку скорость диссипации в системе, которая находится в тепловом равновесии, должна быть неотрицательна, то мнимая часть диэлектрической проницаемости должна удовлетворять условию

$$\alpha''(\omega > 0) > 0. \quad (7.3b)$$

Если сила действовала в течении ограниченного времени, так что может быть представлена в виде (7.1d), то полное выделившееся тепло в системе равно

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} dt Q = \int_{-\infty}^{+\infty} (d\omega) \omega \alpha''(\omega) |f_\omega|^2. \quad (7.3c)$$

7-1.1.2 Энергия колебаний в средах с низким поглощением

Пусть теперь среда в некотором диапазоне частот может считаться бездиссипативной, так что в этом частотном диапазоне $\alpha'' \ll \alpha'$.

...

7-1.2 Формула Кубо

Пусть теперь у нас есть несколько сил f^i и сопряжённых им величин $\hat{x}^i$, так что гамильтониан возмущения, производимого внешними силами, равен

$$\hat{V}(t) = - \sum_i \hat{x}^i f^i(t).$$

Среднее значение $x^i(t)$ этих величин будет линейно по силам, если они малы,

$$x^i(t) = \sum_k \int_0^\infty d\tau \alpha^{ik}(\tau) f^k(t - \tau).$$

При $i \neq k$ функция отклика α^{ik} может быть названа взаимной восприимчивостью.

Для восприимчивости $\alpha^{ik}(\tau)$ может быть получена формула Кубо, обобщающая ‘золотое правило Ферми’. Общее выражение для среднего значения величины $\hat{x}^i$ есть

$$x^i(t) = \text{tr}\{\hat{\rho}(t) \hat{x}^i(t)\}, \quad (7.4)$$

где $\hat{\rho}$ — матрица плотности системы. Будем работать в представлении взаимодействия, так что

$$i\hbar \partial_t \hat{\rho} = [\hat{\rho}, \hat{V}], \quad i\hbar \partial_t \hat{V} = [\hat{H}_0, \hat{V}],$$

где $\hat{H}_0$ — гамильтониан невозмущённой системы. Разложим матрицу плотности в ряд по малому возмущению до первого порядка,

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_0 + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t [\hat{\rho}_0, \hat{V}(t')] dt'.$$

Здесь матрица плотности ρ_0 соответствует статистическому равновесию, то есть является распределением Гиббса,

$$\hat{\rho}_0 = \exp(-(\hat{H}_0 - F)/T),$$

где F — свободная энергия. Подставляя это в выражение (7.4), получаем

$$x^i(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt \text{tr}([\hat{\rho}_0, \hat{x}^k(t')] \hat{x}^i(t)) f(t').$$

Сравнивая это выражение с выражением (7.1b), определяющим восприимчивость $\hat{\alpha}(\tau)$, заключаем, что она равна

$$\begin{aligned} \alpha^{ik}(\tau > 0) &= -\frac{i}{\hbar} \text{tr}([\hat{\rho}_0, \hat{x}^k(t)] \hat{x}^i(t + \tau)) = \\ &= \frac{i}{\hbar} \text{tr}(\hat{\rho}_0 [\hat{x}^i(t + \tau), \hat{x}^k(t)]) . \end{aligned} \quad (7.5)$$

Обратим внимание, что в (7.5) динамика $\hat{x}^i(t)$ определяется невозмущённым гамильтонианом $\hat{H}_0$. Поэтому, в частности, время t в (7.5) может быть выбрано произвольно, поскольку $[\hat{\rho}_0, \hat{H}_0] = 0$. Соотношение (7.5) называется *формулой Кубо* (см. Ландау и Лифшиц [1995, §126, Ур.(126.9)], Левитов и Шитов [2003, §7.2, Ур.(7.25)]).

7-1.3 Симметрии коэффициентов обобщённой восприимчивости

Для взаимных восприимчивостей выполняется равенство симметрии

$$\alpha^{ik}(\tau; \mathbf{B}) = \alpha^{ki}(\tau; -\mathbf{B}), \quad (7.6)$$

если обе величины x^i и x^k имеют одинаковую симметрию по отношению к операции обращения времени и

$$\alpha^{ik}(\tau; \mathbf{B}) = -\alpha^{ki}(\tau; -\mathbf{B}), \quad (7.7)$$

если величины x^i и x^k имеют противоположную симметрию относительно операции обращения времени. Это равенство связано с инвариантностью динамики системы по отношению к операции обращения времени, поэтому требуется изменение знака перед магнитным полем $\mathbf{B}$. В (7.6) мы предполагаем, что обе величины x^i и

x^k обладают одной и той же симметрией по отношению к операции обращения времени. Если же они обладают противоположной симметрией по отношению к этой операции, в (7.6) надо поставить знак минус, см. Ландау и Лифшиц [1995, §125, Ур.(125.14)].

Докажем формулу (7.6). Сперва напомним, как симметрия физической величины x по отношению к операции времени отображается на матричных элементах оператора этой величины $\hat{x}$. Будем работать в базисе собственных функций $|\psi_n\rangle$ гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}_0$.

Пусть сперва гамильтониан не содержит магнитного поля. Если величина x имеет определённую симметрию по времени, то

$$\begin{aligned} \langle \psi_m | \hat{x}(-t) | \psi_n \rangle &= e^{i(\omega_n - \omega_m)t} x_{mn} = \\ &= \pm \langle \psi_n | \hat{x}(t) | \psi_m \rangle = \pm e^{i(\omega_n - \omega_m)t} x_{nm}, \end{aligned} \quad (7.8a)$$

то есть

$$x_{mn} = \pm x_{nm}. \quad (7.8b)$$

Здесь x_{mn} — матричный элемент оператора величины x в момент времени $t = 0$; выбор знака ‘+’ соответствует симметрии величины по отношению к изменению знака времени, а выбор знака ‘−’ — антисимметрии. Если теперь гамильтониан содержит магнитное поле, то при переходе от первой ко второй строчке в (7.8a) надо в гамильтониане сделать замену знака векторного потенциала, $\mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}$. Это изменит и собственные волновые функции во второй строчке. В результате мы приходим к равенству

$$x_{mn} = x_{nm}^* = \pm x_{nm} \Big|_{\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}}, \quad (7.8c)$$

где * означает операцию комплексного сопряжения. Первое равенство в (7.8c) выражает собой то, что оператор $\hat{x}$ соответствует физической величине и потому

эрмитов. Напомним также, что при замене $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ величина собственной энергии ω_n не изменяется.

Теперь вернёмся к формуле Кубо (7.5), которую можно переписать в виде

$$\alpha^{ki}(\tau) = \frac{i}{\hbar} \text{tr} (\hat{\rho}_0 [\hat{x}^k(t), \hat{x}^i(t - \tau)]). \quad (7.8d)$$

Теперь будем проводить вычисления в базисе стационарных функций Гамильтониана, а также положим $t = 0$, и будем писать для краткости $\hat{x}(t) = \hat{x}$. В результате получим равенство

$$\begin{aligned} \alpha^{ki}(\tau) &= \\ &= \frac{i}{\hbar} \sum_{m,n} \rho_{0n} \left(\langle \psi_n | \hat{x}^k | \psi_m \rangle \langle \psi_m | \hat{x}^i(-\tau) | \psi_n \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \langle \psi_n | \hat{x}^i(-\tau) | \psi_m \rangle \langle \psi_m | \hat{x}^k | \psi_n \rangle \right) = \\ &= \pm \frac{i}{\hbar} \sum_{m,n} \rho_{0n} \left(\langle \psi_n | \hat{x}^i(\tau) | \psi_m \rangle \langle \psi_m | \hat{x}^k | \psi_n \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \langle \psi_n | \hat{x}^k | \psi_m \rangle \langle \psi_m | \hat{x}^i(\tau) | \psi_n \rangle \right) \Big|_{\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}}. \end{aligned} \quad (7.8e)$$

Второе равенство использует (7.8a). Знак ‘+’ соответствует одинаковой симметрии величин x^i, x^k по отношению к операции обращения времени, знак ‘−’ — противоположной. Сравниваясь с формулой Кубо (7.5), заключаем, что

$$\alpha^{ki}(\tau) = \pm \frac{i}{\hbar} \text{tr} \{ \hat{\rho}_0 [\hat{x}^i(\tau), \hat{x}^k] \} \Big|_{\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}}. \quad (7.8f)$$

В результате приходим к соотношениям (7.6, 7.7).

§7-2. Аналитические свойства обобщённой восприимчивости

Из принципа причинности следует, что в Фурье-представлении у комплексной функции $\alpha(\omega)$ в верхней полуплоскости, когда $\text{Im} \omega > 0$, нет полюсов. В свою очередь, из этого факта следует равенство

$$\int d\omega' \frac{\alpha(\omega')}{\omega' - (\omega + i0)} = 2\pi i \alpha(\omega), \quad (7.9a)$$

где интегрирование производится по действительной оси. Если в выписанном интегральном равенстве выделить действительную и мнимую части, то получим соотношения Крамерса-Кронига (Kramers-Kronig relations):

$$\alpha'(\omega) = \frac{1}{\pi} \oint d\omega' \frac{\alpha''(\omega')}{\omega' - \omega}, \quad (7.9b)$$

$$\alpha''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \oint d\omega' \frac{\alpha'(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{\mu}{\omega}, \quad (7.9c)$$

где интегрирование вблизи полюса происходит в смысле главного значения. В (7.9c) в действительной части восприимчивости мы выделили δ -функциональный вклад (7.1j), производимый ненулевой подвижностью μ — предполагается, что в $\alpha'(\omega)$ этого вклада нет. Дело в том, что экспериментально его измерить возможно только через измерение подвижности, то есть мнимой части восприимчивости.

Воспользуемся чётностью действительной и нечётностью мнимой частей восприимчивости, см. (7.1g), чтобы ограничить интегрирование в соотношениях Крамерса-

Кронига на положительные частоты:

$$\alpha'(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\omega' \alpha''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}, \quad (7.9d)$$

$$\alpha''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\alpha'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} + \frac{\mu}{\omega}. \quad (7.9e)$$

7-2.1 Комплексность восприимчивости α в верхней полуплоскости

Для обобщённой восприимчивости верно следующее утверждение: в верхней полуплоскости комплексной переменной ω восприимчивость принимает вещественные значения только на мнимой оси, см. (7.1h). На мнимой оси $\alpha(i\omega'')$ монотонно убывает как функция $\omega'' > 0$ до нуля при $\omega \rightarrow \infty$.

В частности, $\alpha(\omega)$ не обращается в ноль и не принимает отрицательных действительных значений в верхней полуплоскости.

Доказательство. Доказательство смотри в Ландау и Лифшиц, 1995, § 123.

7-2.2 Среды с низким поглощением

Пусть в некотором диапазоне частот среда обладает близким к нулю поглощением, то есть в этом частотном

диапазоне можно принять $\alpha'' = 0$, то есть $\alpha = \alpha'$. Тогда в соотношении Крамерса-Кронига (7.9d) интеграл следует понимать в простом смысле, поскольку смысл главного значения становится избыточным (когда $\omega' \rightarrow \omega$, мнимая часть $\alpha''(\omega') = 0$). Поэтому этот интеграл можно дифференцировать по частоте ω как по параметру, в результате чего получаем

$$\frac{d\alpha'}{d\omega} = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\omega' \alpha''(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} > 0. \quad (7.9f)$$

Поскольку действительная часть восприимчивости $\alpha'(\omega)$ чётна, см. (7.1g), то при рассмотрении (7.9f) достаточно ограничиться положительными частотами $\omega > 0$. Поскольку диссипация всегда положительна, см. (7.3b), справа в (7.9f) стоит положительное выражение. Таким образом, восприимчивость в области низких потерь является возрастающей функцией частоты. Если же теперь домножим обе части (7.9d) на ω^2 и снова продифференцируем, то получим

$$\frac{d(\omega^2 \alpha)}{d\omega} = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\omega'^3 \alpha''(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} > 0. \quad (7.9g)$$

Неравенство (7.9g) сильнее неравенства (7.9f), если восприимчивость отрицательна, $\alpha(\omega) < 0$. В противном случае (7.9g) следует из (7.9f).

§7-3. Флуктуации случайной величины: автокорреляционная функция

Пусть x – измеряемая величина некоторой физической системы, $\hat{x}$ – квантовомеханический оператор, соответствующий этой величине. Эта система имеет большое число степеней свободы и/или взаимодействует с резервуаром, поэтому поведение во времени величины $x(t)$ носит случайный характер: есть вреднее по времени значение $\langle x \rangle_t$, которое для упрощения записи дальнейших формул мы считаем нулевым, $\langle x \rangle_t = 0$, и на фоне этого среднего величина $x(t)$ претерпевает случайные флуктуации.

Хотя флуктуации $x(t)$ носят случайный характер, их статистика однородна по времени, если состояние исследуемой системы во времени статистически не меняется; в таком случае $x(t)$ называется *стационарной случайной функцией*. В дальнейшем наших рассуждениях мы будем предполагать такую статистическую однородность по времени. В таком случае характер флуктуаций $x(t)$ можно описать с помощью корреляционных функций. Простейшей корреляционной функцией является парная корреляционная функция

$$F(\tau) = \langle x(t) x(t + \tau) \rangle, \quad (7.10a)$$

называемая также *автокорреляционной функцией*. В (7.10a) угловые скобки обозначают усреднение. Это усреднение можно понимать как усреднение по времени t , так и усреднение по статистическому ансамблю рассматриваемых систем. В последнем случае левая часть не зависит от общего сдвига по времени t именно в силу статистической однородности по времени.

Удобно иметь дело с Фурье-компонентами величин. Экспериментально измеренный случайный процесс представим в виде

$$x(t) = \int (d\omega) x_\omega e^{-i\omega t}, \quad (7.10b)$$

Здесь молчаливо предполагается, что процесс $x(t)$ измерен на очень долгом промежутке времени, в пределе бесконечном. Предельный переход при увеличении длительности конечного времени наблюдения обсуждается ниже в Пункте 7-3.1.1. Для корреляционной функции трудностей с Фурье-преобразованием не возникает, поскольку обычно корреляционная функция стремится по

абсолютной величине к нулю на больших временах:

$$F(\tau) = \int (d\omega) F_\omega e^{-i\omega\tau}, \quad F_\omega = \int d\tau F(\tau) e^{i\omega\tau}. \quad (7.10c)$$

Предположим сейчас, что рассматриваемая величина x классическая, т.е. $x(t)x(t') = x(t')x(t)$. Из этого предположения, а также из статистической однородности по времени следует чётность автокорреляционной функции, $F(-\tau) = F(\tau)$. Действительно,

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \langle x(0)x(\tau) \rangle = \langle x(t)x(\tau+t) \rangle = \\ &= \langle x(0)x(-\tau) \rangle = F(-\tau). \end{aligned} \quad (7.10d)$$

В процессе выкладок мы выбрали $t = -\tau$.

7-3.1 Теорема Винера-Хинчина

Связь между F_ω и статистикой Фурье-компонент x_ω (7.10b) можно получить, исходя из определения $F(\tau)$:

$$F_\omega = \int (d\omega')(d\omega'') \langle x_\omega x_{\omega'} \rangle \exp(-it(\omega + \omega')), \quad (7.11)$$

где $\langle x_\omega x_{\omega'} \rangle$ — среднее значение, которое в данном случае проще всего понимать в смысле усреднения по статистическому ансамблю. Для того, чтобы корреляционная функция зависела только от разности времен τ , надо, чтобы зависимость от абсолютного значения времени t отсутствовала. Это достигается, если среднее от Фурье-компонент случайного процесса не равно нулю только при совпадении абсолютного значения частот:

$$\langle x_\omega x_{\omega'} \rangle = 2\pi\delta(\omega + \omega') (x^2)_\omega, \quad (x^2)_\omega = F_\omega. \quad (7.12)$$

Второе соотношение в (7.12), утверждающее, что спектр сигнала $(x^2)_\omega$ равен Фурье-образу автокорреляционной функции F_ω , называется теоремой Винера-Хинчина (также известная как теорема Хинчина-Колмогорова), см. [Рытов, 1976, §41] и оригинальные работы [Хинчин, 1938].

7-3.1.1 Получение корреляционных функций путём усреднения по времени

Предположим, что случайный процесс $x(t)$ измерялся в течении некоторого (относительно продолжительного) промежутка времени T . Выпишем здесь математические соотношения, позволяющие оперировать с Фурье-компонентами случайного процесса $x(t)$ и автокорреляционной функции $F(\tau)$. Мы будем считать, что измерение проводилось во временном интервале $[-T/2, T/2]$, а процесс $x(t)$ является периодичным с периодом T . Поскольку в окончательных ответах будет предполагаться предельный переход $T \rightarrow \infty$, то принятая периодичность не должна влиять на эти окончательные ответы.

Фурье-разложение процесса $x(t)$ имеет вид

$$x_\omega = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} dt \exp(i\omega_n t) x(t), \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad (7.13)$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-i\omega_n t) x_{\omega_n},$$

где n — целое число, $n \in \mathbb{Z}$. Множитель $1/\sqrt{T}$ в правой части оставляет Фурье-компоненту x_{ω_n} конечной при $T \rightarrow \infty$. В непрерывном пределе обратное преобразование Фурье выглядело бы как

$$x(t) = \sqrt{T} \int (d\omega) e^{-i\omega t} x_\omega, \quad x_\omega = \frac{1}{\sqrt{T}} x_\omega.$$

сравни с (7.10b). Таким образом, Фурье-образы x_ω и x_ω не равны друг другу, а связаны между собой коэффициентом пропорциональности, зависящим от времени наблюдения; отметим, что удобство использования x_ω состоит в его конечности при увеличении времени наблюдения, при $T \rightarrow \infty$.

Корреляционная функция

$$F(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t+\tau) dt. \quad (7.14)$$

Поскольку при $\tau \rightarrow \infty$ автокорреляционная функция стремится к нулю, то при её Фурье-преобразовании частоту ω можно по-прежнему считать непрерывной величиной, оставляя поэтому определение преобразования Фурье для $F(\tau)$ в виде (7.10c). Тем не менее, для проведения вычислений, сейчас мы будем считать ω дискретной. Итак,

$$F_\omega = \sum_{n,k \in \mathbb{Z}} x_{\omega_n} x_{\omega_k} \frac{\sin[(\omega - \omega_n)T/2]}{(\omega - \omega_n)T/2} \frac{\sin[(\omega_k + \omega_n)T/2]}{(\omega_k + \omega_n)T/2},$$

причём выражение типа $\sin(\omega'T)/(\omega'T)$ при $\omega' = 0$ надо считать равным 1. При $T \rightarrow \infty$ из суммы выпадают все слагаемые, кроме одного, которое определяется условием $\omega_n = \omega$, $\omega_k = -\omega$. Поэтому

$$F_\omega = |x_\omega|^2.$$

В этой формуле частоту ω можно уже считать непрерывным параметром: хотя величина $|x_{\omega_n}|^2$ как функция n флуктуирует (вообще говоря, сильно) около своего среднего значения, но если произвести усреднение этой величины по промежутку $\delta n \gg 1$, то при $T \rightarrow \infty$ таким образом полученное среднее $\langle |x_\omega|^2 \rangle$ следует считать медленно меняющейся (на масштабах $\gtrsim \delta n$ и много меньших характерного изменения частот, на которой меняется корреляционная функция F_ω) функцией ω . Таким образом, окончательно получаем, что

$$F_\omega = (x^2)_\omega = \langle |x_\omega|^2 \rangle = \frac{1}{T} \langle |x_\omega|^2 \rangle. \quad (7.15)$$

Усреднение в этой формуле (реально происходящее по n) можно понимать и как усреднение по статистическому ансамблю: по сути, усреднив по δn , мы провели усреднение по δn почти независимых промежутков времени длительностью $T/\delta n$.

Если мы опустим в (7.14) усреднение по времени t (при этом назовём такую функцию $F(\tau, t)$), то получим, что

$$F_\omega(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_{\omega_n} \chi_\omega \exp(-i(\omega_n + \omega)t).$$

Сравнивая это выражение с выражениями (7.11, 7.12) ещё раз приходим к естественному выводу: усреднение по времени в этом выражении соответствует усреднению по статистическому ансамблю в выражении (7.12).

7-3.2 Корреляционная функция в формализме квантовой механики

Фурье-компонента от оператора случайной величины и его матричного элемента в представлении Гейзенберга в базисе собственных функций Гамильтониана $|n\rangle$ даётся выражениями:

$$\hat{x}_\omega = \int dt \hat{x}(t) \exp(i\omega t), \quad (7.16a)$$

$$(x_\omega)_{nm} \equiv \langle n | \hat{x}_\omega | m \rangle = 2\pi \delta(\omega_{nm} - \omega) x_{nm}.$$

Обобщая выражение (7.10a) для корреляционной функции на квантовый формализм, сохраним её симметричность по времени (7.10d):

$$F(\tau) = \frac{1}{2} \langle \hat{x}(t) \hat{x}(t + \tau) + \hat{x}(t + \tau) \hat{x}(t) \rangle. \quad (7.16b)$$

Усреднение в (7.16b) проводится по матрице плотности системы $\hat{\rho}$, которая предполагается статистически постоянной во времени. В соответствии с (7.16b), произведение $x_\omega x_{\omega'}$ в (7.11) заменяется на симметризованный квадрат обобщённой координаты: например, его диагональный матричный элемент равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\hat{x}_\omega \hat{x}_{\omega'} + \hat{x}_{\omega'} \hat{x}_\omega)_{nn} &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_m \left((x_\omega)_{nm} (x_{\omega'})_{mn} + (x_{\omega'})_{nm} (x_\omega)_{mn} \right) = \\ &= 2\pi^2 \sum_m |x_{nm}|^2 \left(\delta(\omega_{nm} - \omega) + \delta(\omega_{nm} + \omega) \right) \delta(\omega + \omega') \end{aligned} \quad (7.16c)$$

Проводя выкладки, мы использовали определение (7.16a). Поэтому Фурье-образ корреляционной функции $F_\omega = (x^2)_\omega$ (7.12) в случае, если система находится в состоянии $|n\rangle$, равен

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |n\rangle \langle n|, \\ (x^2)_\omega &= \pi \sum_m |x_{nm}|^2 \left(\delta(\omega_{nm} - \omega) + \delta(\omega_{nm} + \omega) \right). \end{aligned} \quad (7.16d)$$

Если статистика системы описывается распределением Гиббса $\rho_n = \exp[(F - E_n)/T]$, то выражение (7.16d) надо усреднить по этому распределению, в результате чего получим

$$(x^2)_\omega = \pi \left(1 + \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right) \right) \sum_{n,m} \rho_n |x_{nm}|^2 \delta(\omega_{mn} - \omega). \quad (7.16e)$$

§7-4. Флуктуационно-диссипационная теорема

Согласно золотому правилу Ферми, обобщённая восприимчивость для величины x по отношению к силе, действующей на эту же величину, может быть получена из информации о матричных элементах оператора $\hat{x}$ этой величины и о распределении по микроканоническим состояниям исследуемой системы. Эта же информация достаточна и для нахождения автокорреляционной функции величины x , а значит, и её флуктуаций. Более конкретно, и в обобщённую восприимчивость (7.17e), и в автокорреляционную функцию (7.16e) входит усреднение по распределению Гиббса от квадрата определённых матричных элементов оператора $\hat{x}$. Поэтому удаётся установить связь (7.17f) между обобщённой восприимчивостью и тепловыми флуктуациями величины $\hat{x}$, что составляет содержание *флуктуационно-диссипационной теоремы*. Выведем эту теорему.

Рассмотрим некоторую систему, на которую действует гармоническая внешняя сила $f(t)$ (7.1c). Воздействие

силы на систему описывается гамильтонианом (7.1a). Согласно ‘золотому правилу Ферми’, скорость перехода dw_{nm} из состояния $|n\rangle$ в состояния $|m\rangle$ из малого фазового объёма $d\Gamma_m$ равна

$$dw_{nm} = \frac{2\pi}{\hbar^2} |x_{nm}|^2 |f_\omega|^2 (\delta(\omega_{mn} - \omega) + \delta(\omega_{mn} + \omega)) d\Gamma_m, \quad (7.17a)$$

где две δ -функции в скобках соответствуют тому, что в силе f (7.1c) формально присутствуют две гармоники $\pm\omega$, разности частот

$$\omega_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar, \quad (7.17b)$$

и мы, как это всегда делается при применении ‘золотого правила Ферми’, предположили, что квадрат матричного элемента $|x_{nm}|^2$ слабо отличается для разных состояний $|m\rangle$ в элементе фазового объёма $d\Gamma_m$. При переходе из состояния $|n\rangle$ в состояние $|m\rangle$ системе передаётся энергия $\hbar\omega_{mn}$, фиксированная по абсолютной величине,

$|\omega_{mn}| = \omega$. Поэтому скорость выделения тепла в системе

$$\begin{aligned} Q &= \int d\Gamma_n d\Gamma_m \rho_n w_{nm} \hbar \omega_{nm} = \\ &= \frac{2\pi\omega}{\hbar} |f_\omega|^2 \times \\ &\times \int d\Gamma_n d\Gamma_m \rho_n |x_{nm}|^2 (\delta(\omega_{mn} - \omega) - \delta(\omega_{mn} + \omega)) = \\ &= \frac{2\pi\omega}{\hbar} |f_\omega|^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right)\right) \times \\ &\times \int d\Gamma_n d\Gamma_m \rho_n |x_{nm}|^2 \delta(\omega_{mn} - \omega), \end{aligned} \quad (7.17c)$$

где

$$\rho_n = \exp((F - E_n)/T) \quad (7.17d)$$

есть распределение Гиббса.

Сравнивая общее выражение (7.3a) для скорости диссипации энергии при действии монохроматического внешнего возбуждения с полученным выражением (7.17c), заключаем, что Фурье-компонента мнимой части восприимчивости

$$\alpha''_\omega = \frac{\pi}{\hbar} \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right)\right) \sum_{n,m} \rho_n |x_{nm}|^2 \delta(\omega_{mn} - \omega). \quad (7.17e)$$

В (7.17e) мы перешли от интегрирования по фазовому пространству к сумме по состояниям для удобства сравнения правой части с Фурье-образом от автокорреляционной функции (7.16e). В итоге получаем, что

$$(x^2)_\omega = \hbar \alpha''_\omega \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right). \quad (7.17f)$$

Это равенство и называется *флуктуационно-диссипационной теоремой*.

7-4.1 Флуктуационно-диссипационная теорема в классическом пределе

Классический предел достигается, когда постоянную Планка следует считать малой, и потому соответствует высоким температурам, $T \gg \hbar\omega$. В этом пределе выражение (7.17f) принимает вид

$$(x^2)_\omega = \frac{2T\alpha''_\omega}{\omega}. \quad (7.18a)$$

В частности, средний (одновременной) квадрат флуктуаций даётся выражением, см (7.15):

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (d\omega) (x^2)_\omega = 2T \int_{-\infty}^{+\infty} (d\omega) \frac{\alpha''_\omega}{\omega} = T\alpha'_{\omega=0}, \quad (7.18b)$$

где мы воспользовались соотношением Крамерса-Кронига (7.9b).

Связь подвижности и коэффициента диффузии.

Пусть задача однородна по x , так что можно определить подвижность (7.1i). По определению, коэффициент диффузии D есть коэффициент в линейном росте среднего квадрата смещения x на больших временах:

$$\langle (x(t) - x(0))^2 \rangle \rightarrow 2D|t|, \quad \text{at } |t| \rightarrow \infty. \quad (7.18c)$$

Между подвижностью μ и коэффициентом диффузии D есть связь

$$D = T\mu, \quad (7.18d)$$

называемая *соотношением Эйнштейна-Смолуховского*. Докажем это соотношение.

Возьмём преобразование Фурье по времени от соотношения (7.18c). При этом, поскольку нас интересуют малые частоты, т.е. большие времена, то в качестве правой части можно брать её линейную асимптотику. В левой части вклад на ненулевой частоте производят только перекрёстные члены, появляющиеся при раскрытии полного квадрата. Получим

$$-2(x^2)_\omega = 4D \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{i\omega t - \epsilon t} t dt = -\frac{4D}{\omega^2}, \quad (7.18e)$$

где бесконечно малое $\epsilon > 0$. Выразим теперь $(x^2)_\omega$ (7.18a) через α''_ω и воспользуемся её связью (7.1j) с подвижностью при низких частотах (напомним, что, строго говоря, соотношение (7.18e) верно только в пределе $\omega \rightarrow 0$). В результате придём к (7.18d).

• **Задача 1:** Доказать соотношение Эйнштейна-Смолуховского (7.18d) исходя из требования, чтобы стационарным распределением частиц в потенциале $U(x)$ было $\rho(x) = \rho_0 \exp(-U(x)/T)$.

Глава 8

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

§8-1. Криволинейные координаты, вложенные в трёх-мерное пространство

Рассмотрим трёх-мерное евклидово пространство с декартовой системой координат r^i , $\{i, j, k, \dots\} = \{1, 2, 3\}$. Пусть также в этом пространстве определена некоторая криволинейная система координат ξ^μ , $\{\mu, \nu, \lambda, \dots\} = \{1, 2, 3\}$. Техника дифференциальной геометрии позволяет обобщать запись векторных и тензорных равенств, сформулированных исходно чаще всего в декартовой системе координат, на криволинейные координаты.

Матрицы перехода для тензоров от декартовой к криволинейной системе координат и обратно

$$\Lambda_i^\mu = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial r^i} \equiv \partial_i \xi^\mu, \quad \Lambda_\mu^i = \frac{\partial r^i}{\partial \xi^\mu} \equiv \partial_\mu r^i, \quad \Lambda_i^\mu \Lambda_\mu^k = \delta_{ik}. \quad (8.1)$$

Произвольные векторные поля v^i, w^i , записанные в декартовых координатах, переписываются в криволинейных координатах согласно правилу

$$v^\mu = \Lambda_\mu^i v^i, \quad v_\mu = \Lambda_\mu^i v_i. \quad (8.2)$$

Таким образом, если в декартовых координатах вопрос, имеет ли векторный индекс верхнее и нижнее положение, не имеет значения, то для криволинейных координат верхнее v^μ и нижнее v_μ положение векторного индекса соответствует контравариантному (типа (0,1)) и ковариантному (типа (1,0)) векторным полям v . Вообще, величины, преобразующиеся при переходе из одной криволинейной системы координат в другую согласно правилам (8.2), называются тензорами; например, тензором типа (0,2) является произведение $v^\mu w^\nu$.

Поговорить о матрице перехода Λ_μ^i от одной криволинейной системы координат ξ^ν к другой ξ'^μ ...

Скалярное произведение двух полей v^i и w^i в криволинейных координатах записывается в виде свёртки по нижнему и верхнему индексам:

$$v^i w_i = v_\mu w^\mu = v^\mu w_\mu.$$

Отметим, что операция суммирования по двум верхним или по двум нижним индексам в произвольном выражении, записанная в криволинейных координатах, не приводит к получению тензора, и потому в общем случае запрещена. В общем случае операция суммирования

по паре верхний-нижний индексы называется *свёрткой* (convolution).

Метрический тензор (metric tensor)

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \Lambda_\mu^i \Lambda_\nu^j g_{ij}, \quad g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda. \quad (8.3)$$

Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ содержит полную информацию о соотношении малых приращений криволинейных координат с расстоянием, площадью и объёмом в декартовой системе координат. В частности, элемент объёма

$$d^3 r = \sqrt{g} d^3 \xi, \quad g = \det \|g_{\mu\nu}\|.$$

Метрический тензор позволяет переводить контравариантное поле в ковариантное и обратно,

$$v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu, \quad v^\mu = g^{\mu\nu} v_\nu. \quad (8.4)$$

8-1.0.1 Ковариантная производная

Градиент скалярного поля φ в криволинейных координатах вычисляется также, как и в декартовых:

$$\Lambda_\nu^i \partial_i \varphi \equiv \nabla_\nu \varphi = \partial_\nu \varphi \quad (8.5)$$

согласно (8.2). Поле $\partial_\nu \varphi$ является, таким образом, ковариантным полем. Аналогично, градиент $\partial_i v^k$ некоторого векторного поля v^k в его ковариантной записи в криволинейных координатах определяется согласно правилу

$$\Lambda_\mu^i \Lambda_\nu^k \partial_i v^k \equiv \nabla_\mu v_\nu = \partial_\mu v_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v_\lambda. \quad (8.6)$$

Таким образом, в отличие от случая скаляра (8.5), $\partial_\mu v_\nu$ не является ковариантным тензором второго ранга, тогда как $\nabla_\mu v_\nu$ — является. Не является, соответственно, и тензором символ Кристоффеля (Christoffel symbols) $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$: при переходе из одной криволинейной системы координат в другую он не преобразуется согласно правилам (8.2); тем не менее, поднятие и опускание индексов у символа Кристоффеля производится по тем же правилам (8.4). В случае, если в (8.6) градиент берётся не от вектора, а от тензора ранга n (например, $v_\mu w_\nu$, ранг 2), то вместо одного слагаемого с символом Кристоффеля в (8.6) должно стоять, соответственно, n слагаемых. Градиент контравариантного поля имеет вид

$$\Lambda_\mu^i \Lambda_\nu^k \partial_i v^k \equiv \nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu v^\lambda. \quad (8.7)$$

Приняты обозначения:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu v_\nu &= v_{\nu;\mu}, & \partial_\mu v_\nu &= v_{\nu,\mu}, \\ \nabla^\mu &= g^{\mu\nu} \nabla_\nu, & v_\nu{}^{;\mu} &= g^{\mu\lambda} v_{\nu;\lambda},\end{aligned}$$

∇_μ называется ковариантной производной в отличие от простой производной ∂_μ . Закон преобразования символов Кристоффеля при переходе из одной системы координат в другую

$$\Gamma'^\mu{}_{\nu\lambda} = \Lambda'^\mu{}_\sigma \Lambda^\rho{}_{\nu'} \Lambda^\varsigma{}_{\lambda'} \Gamma^\sigma{}_{\rho\varsigma} + \Lambda'^\mu{}_\sigma \left(\frac{\partial \Lambda^\sigma{}_{\nu'}}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial \xi'^\nu \partial \xi'^\lambda} \right) \quad (8.8)$$

ещё раз показывает, что $\Gamma'^\mu{}_{\nu\lambda}$ не является тензором.

Ковариантная производная коммутирует с метрическим и абсолютно антисимметричным (8.12) тензорами,

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} \nabla_\lambda, & \nabla_\lambda g^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \nabla_\lambda, \\ \nabla_\lambda \mathfrak{E}^{\mu\nu\rho} &= \mathfrak{E}^{\mu\nu\rho} \nabla_\lambda.\end{aligned} \quad (8.9)$$

Эти равенства легко проверить, записав результат дифференцирования в декартовых координатах, где метрический и антисимметричный тензор постоянны в пространстве и равны соответственно δ^{ik} и ϵ^{ikl} . Символы Кристоффеля могут быть вычислены согласно формулам

$$\begin{aligned}\Gamma_{\lambda\mu\nu} &= \Gamma_{\lambda\nu\mu} = \Lambda_\lambda^i \partial_\mu \Lambda_\nu^i = \partial_\lambda r^i \partial_\mu \partial_\nu r^i = \\ &= (g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda})/2.\end{aligned} \quad (8.10)$$

Последнюю формулу можно получить, воспользовавшись условием равенства нулю ковариантной производной от метрического тензора:

$$0 = g_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\varsigma{}_{\mu\lambda} g_{\varsigma\nu} - \Gamma^\varsigma{}_{\nu\lambda} g_{\mu\varsigma},$$

а затем надо попереставлять индексы в соответствии с правой частью (8.10).

8-1.0.2 Операция взятия ротора

Для того, чтобы понять, как устроена операция взятия ротора в криволинейных координатах, определим сначала абсолютно антисимметричный тензор

$$\mathfrak{E}^{\mu\nu\lambda} = \Lambda_i^\mu \Lambda_j^\nu \Lambda_k^\lambda \epsilon^{ijk} = \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda}}{\sqrt{g}}, \quad \mathfrak{E}_{\mu\nu\lambda} = \sqrt{g} \epsilon^{\mu\nu\lambda}, \quad (8.11)$$

где $\epsilon^{\mu\nu\lambda}$ – 3-х мерный символ Леви-Чивита (*3-dimensional Levi-Civita symbol*) поскольку при преобразовании из декартовых координат в криволинейный фактически вычисляется детерминант матрицы перехода, $\det \|\Lambda_i^\mu\| = 1/\sqrt{g}$, с точностью до знака. В операции взятия ротора, записанной в терминах ковариантного вектора, не участвуют символы Кристоффеля,

$$[\text{rot } \mathbf{v}]^\mu = \mathfrak{E}^{\mu\nu\lambda} \nabla_\nu v_\lambda = \mathfrak{E}^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu v_\lambda \quad (8.12)$$

в силу симметрии символов Кристоффеля по последней паре индексов. Тем не менее, в выражении типа $\mathfrak{E}_{\mu\nu\lambda} \nabla^\nu v^\lambda$ нельзя заменять ковариантную производную простой, поскольку дифференцируется контравариантное векторное поле $\mathbf{v}$.

8-1.0.3 Вариации криволинейных координат

Предположим, что криволинейная система координат связана с материальной средой, и мы производим (дальнейшую) деформацию этой среды, то есть подвергаем некоторой вариации систему криволинейных координат ξ : $\xi(\mathbf{r}) \rightarrow \xi(\mathbf{r}) + \delta\xi(\mathbf{r})$. Это же самое изменение можно представить в виде движения лагранжевых маркеров,

$$r^i(\xi) \rightarrow r^i(\xi) + \delta r^i(\xi) = r^i(\xi) + v^i(\xi) \delta t$$

где δt – приращение (виртуального) времени, а $\mathbf{v}$ – (виртуальная) скорость, $\delta \mathbf{r} = \mathbf{v} \delta t$. Вариации координатных систем связаны между собой соотношениями типа

$$\delta \Lambda_\mu^i = \Lambda_\mu^k \partial_k v^i \delta t, \quad \delta \Lambda_k^\mu = \frac{\partial \delta \xi^\mu}{\partial r^k} = -\Lambda_i^\mu \partial_k v^i \delta t.$$

Выпишем вариации некоторых величин в смысле их субстанциональной производной, т.е. при фиксированных координатах ξ . Вариация метрики

$$\delta g_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^i \Lambda_\nu^k (\partial_i v^k + \partial_k v^i). \quad (8.13)$$

Вариация якобиана перехода

$$\delta g = M_g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = 2g \text{div } \mathbf{v} \delta t, \quad (8.14)$$

где $M_g^{\mu\nu}$ – матрица миноров матрицы $\|g_{\mu\nu}\|$, так что $g = M_g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}/D$, где $D = 3$ – размерность пространства.

8-1.1 Двумерная поверхность, вложенная в трёх-мерное пространство

Рассмотрим поверхность, которая задаётся уравнением $\Phi(\mathbf{r}) = 0$, а на самой поверхности введены координаты ξ^α , $\{\alpha, \beta \dots\} = \{1, 2\}$. Совокупность $\{\xi^1, \xi^2, \Phi\}$ можно рассматривать как систему криволинейных координат, вложенную в трёх-мерное пространство. Эта система координат определена по крайней мере в некоторой окрестности поверхности $\Phi = 0$. Мы предполагаем, что локальные координаты $\{\xi^1, \xi^2, \Phi\}$ образуют правую тройку. Матрицу перехода из декартовой системы координат в криволинейную будем обозначать Λ_i^μ , см. (8.1). Для этих криволинейных координат может быть определена метрика $g_{\mu\nu}$, где $\{\mu, \nu, \dots\} = \{1, 2, \Phi\}$. Блок $g_{\alpha\beta}$ этой метрики является метрикой для криволинейных координат ξ^α на рассматриваемой поверхности. Удобно ввести обозначение

$$g^\perp = \det \|g_{\alpha\beta}\|. \quad (8.15)$$

Пусть ℓ – вектор нормали к поверхности, смотрящий из области ‘1’ в область ‘2’; предположим также, что в

области '1' $\Phi < 0$, а в области '2', соответственно, $\Phi > 0$. Тогда имеем соотношение

$$\ell^i = \frac{\nabla_i \Phi}{|\text{grad } \Phi|} \equiv \frac{\Lambda_i^\Phi}{\sqrt{\Lambda_k^\Phi \Lambda_k^\Phi}} = \frac{\Lambda_i^\Phi}{\sqrt{g^\perp/g}},$$

где Λ_k^μ определено в (8.1).

На поверхности можно определить полностью антисимметричный тензор второго ранга

$$\mathfrak{E}^{\alpha\beta} = \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{g^\perp}}, \quad \mathfrak{E}_{\alpha\beta} = \sqrt{g^\perp} \epsilon^{\alpha\beta}$$

Введём на поверхности косой градиент

$$\nabla_\alpha^* = \mathfrak{E}_\alpha^\beta \nabla_\beta. \quad (8.16)$$

Простой и косой градиенты коммутируют с метрическим и антисимметричным тензорами,

$$\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = \nabla_\alpha \mathfrak{E}^{\beta\gamma} = 0.$$

сравни с (8.9).

Тензор внешней кривизны

$$K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha} = \ell^i \partial_\beta \Lambda_\alpha^i = -\Lambda_\alpha^i \partial_\beta \ell^i. \quad (8.17)$$

Составленные из него два инварианта

$$K = g^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}, \quad K_G = \frac{1}{2} \mathfrak{E}^{\alpha\beta} \mathfrak{E}^{\gamma\delta} K_{\alpha\gamma} K_{\beta\delta} = \frac{\det \|K_{\alpha\beta}\|}{\det \|g_{\alpha\beta}\|} \quad (8.18)$$

называются, соответственно, средней и гауссовой кривизной. Если $R_{1,2}$ – главные кривизны поверхности в точке, то $1/K = 1/R_1 + 1/R_2$, $K_G = 1/(R_1 R_2)$. Отметим, что выбор знака в (8.17) соответствует тому, что для сферы с нормалью ℓ , направленной вовне сферы, средняя кривизна $K < 0$.

8-1.1.1 Запись в терминах единичной нормали

Введём проектор на плоскость

$$\delta_{ik}^\perp = \delta_{ik} - \ell^i \ell^k = g_{\alpha\beta} \Lambda_i^\alpha \Lambda_k^\beta.$$

Будем рассматривать такие криволинейные координаты, для которых бы локально в окрестности рассматриваемой точки вектора Λ_μ^i , $\mu = \{1, 2, \Phi\}$ образуют правую ортонормированную тройку. В этом случае тензора,

определённые на поверхности, можно записывать в декартовых координатах; любая свёртка таких тензоров с вектором нормали $\mathbf{n}$ должна давать ноль. Введём также касательный градиент

$$\partial_i^\perp = \delta_{ik}^\perp \partial_k.$$

Тензор кривизны

$$K_{ik} = -\partial_i^\perp \ell^k = -\partial_k^\perp \ell^i, \quad (8.19)$$

приведённый к диагональному виду, имеет на диагонали ненулевыми элементами $1/R_1$ и $1/R_2$, где $R_{1,2}$ – главные кривизны поверхности в данной точке; собственно говоря, это можно считать определением главных кривизн. Направления на рассматриваемой поверхности, соответствующие главным кривизнам, ортогональны друг другу. Выбор знака в K в частности, средняя K и гауссова K_G кривизны равны соответственно

$$\begin{aligned} K &= K_{ii} = -\text{div } \ell, \\ K_G &= \det \|K_{ik} + \ell^i \ell^k\| = \frac{1}{2} ((\partial_i \ell_k)(\partial_k \ell_i) - (\partial_i \ell_i)^2). \end{aligned}$$

Если мы имеем дело с движением среды, то скорость изменения метрики равна

$$\delta g^\perp = 2g^\perp \delta_{ik}^\perp \partial_i v^k \delta t, \quad (8.20)$$

сравни с (8.14).

8-1.1.2 Параметризация поверхности в декартовых координатах

Пусть теперь поверхность задана уравнением

$$z = h(x, y), \quad \Phi(x, y, z) = z - h(x, y),$$

где $h(x, y)$ – некоторая однозначная функция.

Средняя кривизна

$$K = \frac{\Delta h}{\sqrt{1 + (\nabla h)^2}} - \frac{\partial_\alpha h \partial_\beta h \partial_{\alpha\beta} h}{(1 + (\nabla h)^2)^{3/2}}. \quad (8.21)$$

§8-2. Векторное поле в случае сферической симметрии

Координаты вектора в декартовых координатах будем нумеровать индексами $i, j, k, \dots$. Поскольку задача имеет сферическую симметрию, введём сферические координаты $\{r, \theta, \varphi\}$. Переходя в сферические координаты, мы будем отдельно нумеровать угловые координаты индексами $\alpha, \beta, \dots = \{\theta, \varphi\}$. Оператор Лапласа Δ мы будем представлять в виде

$$\Delta = \frac{1}{r} \partial_r^2 r + \frac{1}{r^2} \Delta_a, \quad (8.22a)$$

$$\Delta_a = \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2. \quad (8.22b)$$

Таким образом, дифференциальный оператор Δ_a является оператором Бельтрами-Лапласа на сфере единичного радиуса. Введём также метрический тензор на поверхности единичной сферы,

$$G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (8.22c)$$

Ковариантную производную некоторой величины f на поверхности единичной сферы мы будем обозначать как

$$\nabla_\alpha f.$$

Кроме того, определим поверхностный ротор

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha^* f &= G_{\alpha\beta} \mathfrak{E}^{\beta\gamma} \nabla_\gamma^\perp f, \\ \mathfrak{E}^{\beta\gamma} &= \frac{\epsilon^{\beta\gamma}}{\sqrt{\det \|G_{\sigma\delta}\|}} \end{aligned} \quad (8.22d)$$

где абсолютно антисимметричный символ определяется условием $\epsilon^{12} = 1$, $\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}$.

8-2.1 Параметризация Дебая

Пусть нам дано трёхмерное бездивергентное векторное поле $\mathbf{v}$,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (8.22e)$$

Представим это поле в виде параметризации Дебая

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi + \operatorname{rot} [\mathbf{r}\chi] + \operatorname{rot} \operatorname{rot} [\mathbf{r}\eta], \quad (8.22f)$$

где $\Delta \Phi = 0$. Конечно, представление бездивергентного векторного поля в виде (8.22f) не единственно, но оно удобно, если задача имеет сферическую симметрию.

Отметим, что если можно записать $\mathbf{v}$ в виде (??), то в (8.22f) функция $\Phi = 0$. Тогда как раз получаем, что три компоненты поля v^i зависят только от двух независимых функций. Причина того, что в общем случае появляется ещё одна функция Φ состоит в том, что бездивергентным полем в ограниченной области может быть, например, электрическое поле, создаваемое точечным неподвижным зарядом. При этом такое поле вовсе не является бездивергентным во всём пространстве.

8-2.1.1 Нахождение скалярных функций Φ , χ и η по векторному полю $\mathbf{v}$

Отдельно для угловых и радиальной компонент имеем:

$$[\operatorname{rot} [\mathbf{r}\chi]]_\alpha = r \nabla_\alpha^* \chi, \quad (8.22g)$$

$$[\operatorname{rot} \operatorname{rot} [\mathbf{r}\eta]]_\alpha = \nabla_\alpha \partial_r [\mathbf{r}\eta], \quad [\operatorname{rot} \operatorname{rot} [\mathbf{r}\eta]]_r = -\frac{1}{r} \Delta_a \eta.$$

Проектируя уравнение (8.22f), его ротор и двойной ротор на радиус-вектор $\mathbf{r}$, получаем [? –проверить знаки]:

$$\begin{aligned} \Delta_a \chi &= r [\operatorname{rot} \mathbf{v}]^r, \\ \Delta \Delta_a \eta &= -r [\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}]^r, \end{aligned} \quad (8.22h)$$

$$\partial_r \Phi = v^r - \frac{\Delta_a \eta}{r}.$$

Сферически симметричная часть в функций χ и η даёт нулевой вклад в поле $\mathbf{v}$. Отметим также полезное свойство используемого представления:

$$\Delta \operatorname{rot} [\mathbf{r}\chi] = \operatorname{rot} [\mathbf{r} \Delta \chi]$$

8-2.2 Электромагнитное поле

Пусть нам дано электромагнитное поле E^i, H^i . По времени мы берём Фурье-компоненту, все компоненты векторных величин предполагаются пропорциональными $\exp\{-i\omega t\}$.

Будем интересоваться областью, где нет источников. В этой области $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$. Электрическое поле, также как и магнитное, в области с постоянной диэлектрической проницаемостью ϵ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + \epsilon \omega^2) \mathbf{E} = 0. \quad (8.23a)$$

Представим электрическое поле $\mathbf{E}$ в виде

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot} [\mathbf{r}\chi] + \operatorname{rot} \operatorname{rot} [\mathbf{r}\eta] \quad (8.23b)$$

В (8.23b) отсутствует градиентный вклад по сравнению с (8.22f), поскольку в области с постоянным значением диэлектрической проницаемости уравнение Максвелла даёт $\partial_t \mathbf{E} = c \operatorname{rot} \mathbf{H}$. Тогда магнитное поле

$$i\omega \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} [\mathbf{r} \Delta \eta] + \operatorname{rot} \operatorname{rot} [\mathbf{r}\chi] \quad (8.23c)$$

представляется в виде, симметричном представлению электромагнитного поля (8.23b).

Выпишем компоненты электромагнитного поля в сферических координатах. Спроектируем уравнение (8.23b) на вектор $\mathbf{r}$. Первое слагаемое в правой части (8.23b) даст нулевой вклад и мы получим

$$r E^r = -\Delta_a \eta. \quad (8.23d)$$

Точно также из уравнения (8.23c) получаем, что

$$i\omega r H^r = -\Delta_a \chi. \quad (8.23e)$$

Тангенциальные компоненты электрического поля, записанные через функции η и χ , представляют из себя сумму градиента и поверхностного ротора:

$$E_\alpha = r\nabla_\alpha^* \chi + \nabla_\alpha \partial_r (r\eta). \quad (8.23f)$$

Аналогично для тангенциальных компонент магнитного поля

$$H_\alpha = -i\varepsilon\omega r\nabla_\alpha^* \eta - \frac{i}{\omega} \nabla_\alpha \partial_r (r\chi), \quad (8.23g)$$

где мы воспользовались уравнением (8.23j).

Наконец, с учётом уравнений (8.23j), которым удовлетворяют функции η и χ , выражения для электромагнитного поля можно переписать и в таком виде:

$$\mathbf{E} = \text{grad}(\partial_r(r\eta)) + \varepsilon\omega^2 r\eta + \text{rot}(r\chi). \quad (8.23h)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{i}{\omega} \text{grad}(\partial_r(r\chi)) - i\varepsilon\omega r\chi - \frac{i}{\omega} \text{rot}(r\Delta\eta).$$

8-2.2.1 Волновое уравнение

Подставим в уравнение (8.23a) представление (8.23b) и домножим результат скалярно на радиус-вектор $\mathbf{r}$. Таким образом получим

$$\Delta_a(\Delta + \varepsilon\omega^2)\eta = 0. \quad (8.23i)$$

Уравнению (8.23i) также удовлетворяет функция χ . Это можно показать, если то же самое проделать с уравнением (8.23c).

Поскольку сферически симметричный вклад в функцию η не имеет физического значения, мы можем считать, что $\Delta_a\eta \neq 0$. Поэтому уравнение (8.23i) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} (\Delta + \varepsilon\omega^2)\eta &= 0, \\ (\Delta + \varepsilon\omega^2)\chi &= 0, \end{aligned} \quad (8.23j)$$

мы также выписали соответствующее уравнение на χ .

Решение уравнения (8.23j), остающееся конечным в нуле, является

$$\chi = \sum_{l,m} \chi_{\text{in}}^{l,m} \frac{J_{l+1/2}(k_{\text{in}}r)}{\sqrt{k_{\text{in}}r}} \mathcal{Y}^{l,m}(\theta, \varphi), \quad \varepsilon_{\text{in}} > 0. \quad (8.23k)$$

где

$$k_{\text{in}} = \omega\sqrt{\varepsilon_{\text{in}}},$$

если диэлектрическая проницаемость внутри сферы больше нуля. Если же диэлектрическая проницаемость материала внутри сферы отрицательна, то вместо функции J следует взять функцию I , которая связана с J соотношением

$$I_\nu(z) = e^{-\pi\nu i/2} J_\nu(e^{\pi i/2} z)$$

Решение во внешней области, не содержащей начало координат, записывается в виде

$$\chi = \sum_{l,m} \mathcal{Y}^{l,m}(\theta, \varphi) \times \quad (8.23l)$$

$$\times \frac{\chi_{\text{out}-}^{l,m} H_{l+1/2}^{(1)}(kr) + \chi_{\text{out}+}^{l,m} H_{l+1/2}^{(2)}(kr)}{\sqrt{kr}}.$$

где первое слагаемое в правой части (8.23l), с индексом 'out-', соответствует расходящейся сферической волне, тогда как слагаемое с индексом 'out+' соответствует сходящейся сферической волне. Аналогичные разложения следует написать для функции η .

8-2.2.2 Выражение для потока энергии

Поток энергии I через сферу с центром в начале координат даётся выражением

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8\pi} \text{do} \mathfrak{E}^{\alpha\beta} \text{Re} \langle [E_\alpha (H_\beta)^*] \rangle_t = \quad (8.23m) \\ &= -\frac{ir}{8\pi\omega} \int \text{do} \langle (\Delta_a \chi) \partial_r(r\chi) \rangle_t - \\ &\quad - \frac{i\varepsilon\omega r}{8\pi} \int \text{do} \langle (\Delta_a \eta) \partial_r(r\eta) \rangle_t \end{aligned}$$

где угловые скобки $\langle \dots \rangle_t$ означают усреднение по времени, кратном (или просто много больше) периоду колебания поля.

8-2.2.3 Разложение плоской волны по сферическим волнам

Пусть в декартовых координатах мы имеем плоскую волну с круговой поляризацией, у которой поля $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ и $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ имеют вид

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \exp[ikz], \quad \mathbf{H}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp[ikz].$$

Наша цель – найти функции χ и η , которые бы соответствовали этой волне. Для этого найдём сначала r -компоненты полей с тем, чтобы затем воспользоваться (8.23d, 8.23e) для нахождения исходных η и χ :

$$rE_{\text{ext}}^r = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}) = r \sin \theta e^{i\varphi + ikz} = -irH_{\text{ext}}^r. \quad (8.23n)$$

Заметим здесь, что функции rE^r и rH^r также удовлетворяют уравнению Гельмгольца (8.23a).

Теперь выпишем некоторые формулы, воспользовавшись Флюгге [1974b, сс. 298, 300]

$$e^{ikz} = \frac{1}{\sqrt{kr}} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2\pi^2(2l+1)} i^l J_{l+1/2}(kr) Y_{l,0}(\theta), \quad (8.23o)$$

$$\sin \theta e^{i\varphi} Y_{l,0}(\theta) = C_{l,+} Y_{l+1,1}(\theta, \varphi) + C_{l,-} Y_{l-1,1}(\theta, \varphi), \quad (8.23p)$$

где Y – сферические гармоники, а коэффициенты разложения

$$\begin{aligned} C_{l,+} &= -\sqrt{\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)}}, \\ C_{l,-} &= \sqrt{\frac{l(l-1)}{(2l-1)(2l+1)}}, \end{aligned} \quad (8.23q)$$

В результате получаем, что

$$\begin{aligned} rE_{\text{ext}}^r &= \frac{\pi\sqrt{2}}{k} \times \\ &\times \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{l(l+1)(2l+1)} i^{l-1} \frac{J_{l+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}} Y_{l,1}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (8.23r)$$

Таким образом, используя (8.23d), приходим к ответу

$$\eta = \frac{\pi\sqrt{2}}{k} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2l+1}}{\sqrt{l(l+1)}} i^{l-1} \frac{J_{l+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}} Y_{l,1}(\theta, \varphi). \quad (8.23s)$$

Наконец, для выбранной круговой поляризации $rH_{\text{ext}}^r = irE_{\text{ext}}^r$, поэтому в силу (8.23e) $\chi = -k\eta$.

Первая гармоника. Для исследования рассеяния волны на частицах малого радиуса основную роль играет только первая гармоника в разложении (8.23l). В связи с этим для дальнейшего удобства выпишем отдельно цилиндрические функции с порядком $3/2$:

$$\begin{aligned} \frac{J_{3/2}(x)}{\sqrt{x}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} = \\ &= \partial_x \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin x}{x} \right), \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$\frac{H_{3/2}^{(1)}(x)}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(x+i)e^{ix}}{x^2} = \partial_x \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{ie^{ix}}{x} \right), \quad (8.25)$$

$$\frac{H_{3/2}^{(2)}(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(x-i)e^{-ix}}{x^2} = \partial_x \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{ie^{-ix}}{x} \right) \quad (8.26)$$

В соответствии с определением (8.23l) и разложением (8.23s) для плоской волны, граничными условиями на бесконечности являются

$$\eta_{\text{out}+}^{1,1} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2k} E_0, \quad \chi_{\text{out}+}^{1,1} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{2} H_0 \quad (8.27)$$

8-2.3 Граничные условия на сфере

Если заданы компоненты E^r, H^r на поверхности сферы, то мы можем найти на поверхности сферы также функции η и χ . Поскольку эти функции удовлетворяют уравнению (8.23j), то по значению на сфере и граничным условиям на бесконечности мы можем восстановить их во всём пространстве вне сферы. Окончательно, найдём электромагнитное поле.

Спроектируем уравнения (8.23d-8.23e) на сферическую гармонику $\mathcal{Y}^{l,m}$ и запишем граничные условия для нормальных к поверхности шара компонент электрического и магнитного полей. В результате получим, что непрерывными функциями на поверхности должны являться χ и $\varepsilon\eta$. Теперь напомним граничные условия на тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей. При этом надо отдельно приравнивать градиентные и роторные части. Баланс в роторных частях уже подведён условием непрерывности нормальных компонент электромагнитного поля. Баланс градиентных частей приводит к тому, что непрерывными должны быть также функции $\partial_r(r\chi)$ и $\partial_r(r\eta)$. Таким образом, получаем, что функции

$$\chi, \quad \partial_r\chi, \quad \varepsilon\eta, \quad \partial_r(r\eta)$$

должны быть непрерывны, т.е. граничные условия разделились в терминах функций η и χ .

Используя разложения (8.23k, 8.23l) для функций η и χ внутри и вне сферы, получаем граничные условия в разделённых переменных для χ :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \chi_{\text{in}}^{l,m} J_{l+1/2}(k_{\text{in}}a) = \quad (8.28)$$

$$= \chi_{\text{out}-}^{l,m} H_{l+1/2}^{(1)}(ka) + \chi_{\text{out}+}^{l,m} H_{l+1/2}^{(2)}(ka),$$

$$\sqrt{n} \chi_{\text{in}}^{l,m} J'_{l+1/2}(k_{\text{in}}a) = \quad (8.29)$$

$$= \chi_{\text{out}-}^{l,m} H_{l+1/2}^{(1)'}(ka) + \chi_{\text{out}+}^{l,m} H_{l+1/2}^{(2)'}(ka),$$

а для функции η

$$n^{3/2} \eta_{\text{in}}^{l,m} J_{l+1/2}(k_{\text{in}}a) = \quad (8.30)$$

$$= \eta_{\text{out}-}^{l,m} H_{l+1/2}^{(1)}(ka) + \eta_{\text{out}+}^{l,m} H_{l+1/2}^{(2)}(ka).$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

absorption coefficient, 26

Christoffel symbols, 94

convolution, 94

extinction coefficient, 26

group delay parameter, D , 30

index of refraction, 26

Запаздывающее время, 30

Крамерса-Кронига соотношения, 89

Кристоффеля символ, 94

Критическая частота (частота отсечки), 61

Кубо

 формула, 88

Лехера линия, 64

Показатель

 поглощения, k , 26

 преломления комплексный, $n + ik$, 26

 преломления, n , 26

Френеля

 уравнение, 32

Частота отсечки (критическая частота), 61

волновое сопротивление линии, 65

волновой пакет, 27

восприимчивость

 дипольная, 48

 обобщённая, 87

двухпроводная линия, 64

дисперсия

 аномальная, 30

 нормальная, 30

импеданс

 волновой, 26

коэффициент

 поглощения, 26

оптическая теорема, 47

поверхностное сопротивление, 44

преломление света

 полное, 41

свёртка, 94

сечение

 взаимодействия, 46

 поглощения, 46

 рассеяния, 46

 дифференциальное, 46

система координат

 лабораторная запаздывающая, 30

 сопровождающая, 31

среда прозрачная, 26, 37

уравнение

 волновое, 32

функция

 автокорреляционная, 90

 стационарная случайная, 90

эффект просветления, 49

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

- Pozar, David M. (2012). Microwave Engineering. 4th edition. Wiley.
- Векштейн, Е. Г. (1966). Сборник задачи по электродинамике. Высшая школа.
- Ландау, Л. Д. и Е. М. Лифшиц (1982). Теоретическая физика, том VIII. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука.
- Памятных, Е. А. и Е. А. Туров (2000). Основы электродинамики материальных сред в переменных и неоднородных полях. Физматлит.
- Сивухин, Д.В. (2004). Общий курс физики. Том III. Электричество. 4-е издание, стереотипное. ФИЗМАТЛИТ. ISBN: 5-9221-0227-3.
- Тамм, И.Е. (1966). Основы теории электричества: Учебное пособие для вузов. 11-е издание, исправленное и дополненное. Москва: ФИЗМАТЛИТ. ISBN: 5-9221-0313-X.
- Топтыгин, И. Н. (2005). Современная электродинамика, часть 2. Теория электромагнитных явлений в веществе. Москва-Ижевск: РХД.

Отдельные вопросы электродинамики

- Bohren, Craig F. и Donald R. Huffman (2008). Absorption and scattering of light by small particles. John Wiley & Sons.
- Grinfeld, Michael и Pavel Grinfeld (2015). A variational approach to electrostatics of polarizable heterogeneous substances. B: Advances in Mathematical Physics 2015.
- Kuphaldt, Tony R. (2007). Lessons in Electric Circuits. Англ. Sixth. SelfPublishing.
- Zvezdin, A. K. и V. A. Kotov (1997). Modern magnetooptics and magneto-optical materials. CRC Press.
- Маркузе, Д. (1974). Оптические волноводы. М.: МИР.

Оригинальные работы

- Imoto, Nobuyuki и др. (1980). Birefringence in single-mode optical fiber due to elliptical core deformation and stress anisotropy. B: IEEE Journal of Quantum Electronics 16.11, с. 1267—1271.
- Mie, Gustav (1908). Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. B: Annalen der physik 330.3, с. 377—445.
- Rashleigh, Scott (1983). Origins and control of polarization effects in single-mode fibers. B: Journal of Lightwave Technology 1.2, с. 312—331.

Оглавление

ПРОГРАММА КУРСА	2
1 Уравнения Максвелла в среде; плоские волны	4
2 Термодинамика и кинетика переменного электромагнитного поля в среде с линейным откликом	5
3 Скин-эффект	5
4 Волноводы с металлическими стенками	6
5 Диэлектрические волноводы	7
6 Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах	9
7 Электростатика	10
Контрольная	10
 Глава 1	
Непрерывная среда в электромагнитном поле	11
1-1 Уравнения Максвелла в среде	11
1-1.1 Разделение на составляющие плотностей заряда и тока	11
1-1.2 Граничные условия	12
1-1.3 Гамильтониан тела во внешнем электромагнитном поле	12
1-2 Термодинамика тела в статическом электромагнитном поле	13
1-3 Пондеромоторные силы	15
1-4 Линейный отклик однородной среды на электромагнитное поле	16
1-4.1 Частотное представление	16
1-4.2 Симметрии диэлектрической проницаемости	17
 Глава 2	
Электростатика	18
2-1 Простейшие электростатические задачи	18
2-1.1 Шар в электрическом поле	18
2-1.2 Заряд над границей раздела	19
2-1.3 Заряд рядом с металлическим шаром	19
2-1.4 Задачи	19
2-2 Эллипсоид во внешнем электрическом поле	20
2-2.1 Точное решение задачи	20
2-2.2 Приближённое описание для удлинённого тела вращения	21
2-2.3 Задачи	22
2-3 Двумерная электростатика	22
2-3.1 Эллиптический цилиндр	23
 Глава 3	
Линейные волны в однородной среде	25
3-1 Плоская электромагнитная волна в изотропной среде	25
3-1.1 Дисперсионное соотношение	25
3-1.2 Распространяющаяся плоская монохроматическая волна	25
3-1.3 Задачи	27
3-2 Распространение волнового пакета в среде	27

3-2.1	Выделение огибающей	28
3-2.2	Групповая скорость	28
3-2.3	Аналитические свойства диэлектрической проницаемости	29
3-2.4	Задачи	30
3-3	Динамика формы волнового пакета в среде с дисперсией	30
3-3.1	Уравнение не форму пакета	30
3-3.2	Задачи	31
3-4	Электромагнитные волны в анизотропных средах	31
3-4.1	Уравнение Френеля	32
3-4.2	Распространение лучей	32
3-4.3	Поляризации волн в немагнитных средах	33
3-5	Одноосный кристалл	34
3-5.1	Задачи	34
3-6	Магнитооптика	34
3-6.1	Феноменология	34
3-6.2	Эффект Фарадея	34
3-6.3	Задачи	35
3-7	Энергия поля в диспергирующих средах	36
3-7.1	Мощность, выделяемая в единице объёма	36
3-7.2	Скорость диссипации энергии	37
3-7.3	Энергия электромагнитных волн	37
3-7.4	Задачи	38

Глава 4

Распространение электромагнитных волн

39

4-1	Отражение и преломление волн на плоской поверхности раздела	39
4-1.1	Закон Снелла; полное внутренне отражение	39
4-1.2	Граничные формулы Френеля	40
4-2	Падение волны на непрозрачную среду	42
4-2.1	Граничные условия в форме Леонтовича: общая форма	42
4-2.2	Граничные условия Леонтовича в случае скин-эффекта	43
4-2.3	Поверхностный импеданс металлов	44
4-2.4	Задачи	45
4-3	Рассеяние электромагнитных волн на частицах	46
4-3.1	Оптическая теорема	46
4-3.2	Оптическая теорема в двумерном случае	47
4-4	Общие свойства рассеяния света на мелких частицах	48
4-4.1	Резонансное электро-дипольное рассеяние	48
4-4.2	Задачи	49
4-5	Рассеяние на мелких сферических частицах	50
4-5.1	Магнито-дипольное рассеяние	51
4-5.2	Электро-дипольное рассеяние	54
4-5.3	Задачи	55

Глава 5

Волноводы

57

5-1	Волноводы	57
5-1.1	Уравнения Максвелла и волновые уравнения	57
5-1.2	Интегральные соотношения между полями	58
5-2	Задачи	59
5-3	Волноводы с металлическими стенками	60
5-3.1	Волноводы с односвязным поперечным сечением	60

5-3.2	Потери в волноводах	62
5-3.3	Волноводы с неоднородным поперечным сечением	62
5-3.4	Задачи	63
5-4	Работа двухпроводных линий (линий Лехера) в электрических цепях	64
5-4.1	Подключение нагрузки	66
5-4.2	Потери в линии из-за конечной проводимости металла	66
5-4.3	Трансформатор	67
5-4.4	Задачи	67
5-5	Плоские диэлектрические волноводы	68
5-5.1	ТЕ-моды	68
5-5.2	ТМ-моды	70
5-5.3	Задачи	71
5-6	Направленные моды в аксиально симметричном волноводе	71
5-6.1	Основные обозначения	71
5-6.2	Волновое уравнение	72
5-6.3	Дисперсионное уравнение	73
5-6.4	Задачи	74
5-7	Слабо ведущие волноводы	75
5-7.1	Волновое уравнение	75
5-7.2	Поправки к закону дисперсии и полю	76
5-7.3	Предел слабо-связанной моды	77
5-7.4	Физические параметры некоторых типов оптоволокон	77
5-7.5	Задачи	77
5-8	Двулучепреломление в оптоволоконках	77
5-8.1	Получение поправки через вариационный принцип	78
5-8.2	Получение поправки через теорию возмущений	79
5-8.3	Задачи	79
5-9	Поверхностные плазмоны	80
5-9.1	Дисперсия плазмонов в модели Друде	80

Глава 6

Постоянное магнитное поле

82

6-1	Магнитное поле постоянных токов	82
6-1.1	Задачи	82
6-2	Магнитостатика	83
6-2.1	Магнитная энергия	83
6-2.2	Одноосные ферромагнетики	84
6-2.3	Задачи	85

Часть I**ПРИЛОЖЕНИЯ**

Глава 7

Теория линейного отклика и элементы статистики

87

7-1	Обобщённая восприимчивость	87
7-1.1	Диссипация энергии в системе и энергия колебаний	87
7-1.2	Формула Кубо	88
7-1.3	Симметрии коэффициентов обобщённой восприимчивости	88
7-2	Аналитические свойства обобщённой восприимчивости	89
7-2.1	Комплексность восприимчивости α в верхней полуплоскости	90
7-2.2	Среды с низким поглощением	90

7-3	Флуктуации случайной величины: автокорреляционная функция.....	90
7-3.1	Теорема Винера-Хинчина	91
7-3.2	Корреляционная функция в формализме квантовой механики	92
7-4	Флуктуационно-диссипационная теорема.....	92
7-4.1	Флуктуационно-диссипационная теорема в классическом пределе	93
Глава 8		
Уравнения Максвелла в криволинейных координатах		94
8-1	Криволинейные координаты, вложенные в трёх-мерное пространство.....	94
8-1.1	Двумерная поверхность, вложенная в трёх-мерное пространство	95
8-2	Векторное поле в случае сферической симметрии.....	96
8-2.1	Параметризация Дебая	97
8-2.2	Электромагнитное поле	97
8-2.3	Граничные условия на сфере	99
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ		100
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ		101
Основная литература.....		101
Отдельные вопросы электродинамики.....		101
Оригинальные работы.....		101