

## Задачи по Теории поля

### Рекомендуемая литература

Батыгин, В. & Топтыгин, И. (2002). *Сборник задач по электродинамике*. РХД.

Ландау, Л. & Лифшиц, Е. (2014). *Теоретическая физика. В 10 томах. Том 2. Теория поля. Учебное пособие для вузов*. ФИЗМАТЛИТ.

Из задач, предлагаемых к каждому семинару надо решить столько, чтобы набрать 10 баллов. Баллы за сложные задачи разбиты по подзадачам, соответственно необходимые 10 баллов можно собирать отдельно по этим подзадачам.

## Семинар 1

Преобразование Лоренца. Матричная экспонента. Быстрота. Сокращение Лоренца. Собственное время.

### • *Задача 1 (2 балла):*

Длину стержня, движущегося вдоль своей оси в некоторой системе отсчета, можно измерять таким образом: измерять промежуток времени, в течение которого стержень проходит мимо фиксированной точки этой системы, и умножать его на скорость стержня. Показать, что при таком методе измерения получается обычное лоренцово сокращение.

### • *Задача 2 (2 балла):*

Рассмотрите ‘парадокс’ двух близнецов: близнец  $A$  всё время покоится, а близнец  $B$  сначала движется от  $A$  со скоростью  $v$  вдоль  $Ox$ , а потом с этой же скоростью движется обратно к нему. Когда они встречаются, близнец  $A$  постарел с момента расставания на время  $T$ , а близнец  $B$  оказался моложе, постарев на время  $T_B < T$ .

а) Выразите время  $T_B$  через  $v$  и  $T$ .

б) Может возникнуть недоумение: ведь близнец  $B$  двигался с ускорением совсем немного, когда разворачивался в обратный путь. Во все остальные моменты можно сказать, что  $B$  покоился, а  $A$  двигался равномерно и прямолинейно. Постройте на плоскости  $Oxt$  мировые линии движения  $A$  и  $B$  и убедитесь, что в пространстве Минковского неравенство треугольника не имеет места.

### • *Задача 3 (4 балла):*

Рассмотрев инфинитезимально малые ортогональное преобразование и преобразование Лоренца, посчитайте количество независимых непрерывных параметров в этих преобразованиях.

а) Совершите  $N$  последовательных поворотов на угол  $\phi/N$  вокруг оси  $Oz$  в трёхмерном пространстве,  $N \rightarrow \infty$ . Получите соответствующую матричную экспоненту.

б) Совершите  $N$  последовательных переходов Лоренца характеризующихся относительной скоростью движения систем отсчёта вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $\varphi/N$ . С какой относительной скоростью  $v$  движутся первая и последняя система отсчёта? Параметр  $\varphi$  называется быстротой.

### • *Задача 4 (4 балла):*

Начало координат системы  $K'$  движется со скоростью  $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$  относительно системы  $K$ , а оси координат составляют со скоростью  $\mathbf{V}$  те же самые углы, что и оси

системы  $K$ . Записать матрицу преобразований Лоренца от системы  $K$  к системе  $K'$  (а также обратного преобразования).

- а) (2 балла) Указание: представить радиус-вектор в виде суммы параллельного и перпендикулярного скорости  $\mathbf{V}$  векторов:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$ , где  $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{V})\mathbf{V}/V^2$ ,  $\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{V})\mathbf{V}/V^2$ .
- б) (2 балла) Определить положение осей  $(x', y')$  в системе  $K$  в момент времени  $t = 0$  по часам системы  $K$ .

## Семинар 2

Масса покоя частицы. Полная энергия частицы. Масса составной системы.

- **Задача 5 (2 балла):**

Найти скорость  $v$  частицы с массой  $m$  и зарядом  $q$ , прошедшей разность потенциалов  $U$  (начальная скорость частицы равна нулю). Упростить общую формулу для нерелятивистского и ультрарелятивистского случая (учесть по два члена разложения).

- **Задача 6 (5 баллов):**

Определить относительную скорость сталкивающихся протонов в ускорителе со встречными пучками, если энергия протонов в каждом пучке 5000 ГэВ (приблизительные параметры ЛНС). Какова должна быть энергия налетающих протонов, чтобы столкновение с покоящимся протоном происходило с той же относительной скоростью? Энергия покоя протона равна 938.26 МэВ. В процессе решения задачи ответьте, в частности, на следующие вопросы:

- (2 балла) Чему равен  $\gamma$ -фактор для протонов в лабораторной системе координат и в системе координат, где один из пучков покоится?
- (2 балла) Чему равны абсолютные значения скорости и импульса частицы в ультрарелятивистском пределе, когда  $\gamma \gg 1$ ? Свяжите непосредственно между собой импульс и скорость.
- (1 балл) Посчитайте скорость протонов в лабораторной системе координат и относительную скорость сталкивающихся протонов.

- **Задача 7 (6 баллов):**

Если коллайдер на встречных пучках работает в штатном режиме, то при столкновении двух протонов интересующая нас реакция  $X$  происходит с превышением её порога в  $\alpha$  раз. Однако из-за неполадок

- (3 балла) оба пучка имеют энергию, составляющую только часть  $\epsilon$  от номинальной. При каком значении  $\epsilon$  порог реакции  $X$  достигнут не будет?
- (3 балла) один из двух пучков в коллайдере имеет энергию, составляющую часть  $\epsilon$  от номинальной. При каком значении  $\epsilon$  порог реакции  $X$  достигнут не будет? Пучки считать релятивистскими, так что  $\gamma \gg \alpha^2$ .

### Семинар 3

Распад частиц на две

• **Задача 8 (4 балла):**

$\pi^0$ -мезон распадается на лету на два  $\gamma$ -кванта. Показать, что минимальный угол  $\theta_{min}$  разлета  $\gamma$ -квантов определяется условием

$$\cos \frac{\theta_{min}}{2} = \frac{v}{c}$$

в той системе отсчета, в которой скорость  $\pi^0$ -мезона равна  $v$ .

• **Задача 9 (10 баллов):**

Для нейтрино, образующихся при распаде  $\pi^\pm$ -мезонов с энергией 6 ГэВ (масса  $\pi$ -мезона  $\approx 140$  МэВ, масса  $\mu$ -мезона  $\approx 106$  МэВ), определить энергетический спектр, их максимальную и среднюю энергии и угловое распределение, если известно, что в системе покоя  $\pi$ -мезона распад  $\pi \rightarrow \mu + \nu$  происходит изотропно. При решении задачи ориентируйтесь на следующую последовательность действий:

- а) (1 балл) Найдите энергию вылетающего нейтрино в системе отсчёта покоя  $\pi$ -мезона.
- б) (2 балла) Оставаясь в этой системе отсчёта, запишите условие статистической изотропности распада  $\pi$ -мезона в сферических координатах; выберите  $\theta'$  – угол между направлением движения  $\pi$ -мезона в лабораторной системе (ось  $Oz'$ ) и направлением вылета нейтрино. найдите плотность вероятности  $\mathcal{P}'(\theta')$ , описывающую направление вылета нейтрино.
- в) (2 балла) Запишите закон преобразования Лоренца для 4-импульса нейтрино; для простоты вычислений считайте, что импульс нейтрино лежит в плоскости  $Oxz$ .
- г) (2 балла) Установите закон преобразования угла  $\theta(\theta')$  при переходе в лабораторную систему координат
- д) (3 балла) Релятивистским инвариантом является доля вероятности. Основываясь на этом, запишите закон преобразования для плотности вероятности, найдя  $\mathcal{P}(\theta)$ . Постройте график  $\mathcal{P}(\theta)$ , учитывая наличие большого параметра  $\gamma \gg 1$ .
- е) (4 балла) Установите зависимость энергии нейтрино в лабораторной системе координат в зависимости от угла вылета,  $\varepsilon(\theta')$ . Найдите плотность вероятности  $\mathcal{P}_\varepsilon(\varepsilon)$ .

## Семинар 4

Рассеяние частиц друг на друге

- **Задача 10 (6 баллов):**

Для получения  $\gamma$ -квантов высокой энергии навстречу пучку электронов с энергией  $\mathcal{E} = 200$  ГэВ выстреливает лазер с энергией фотонов  $\varepsilon = 2$  эВ. Какую энергию будут иметь фотоны, рассеянные назад? Найти зависимость энергии фотонов от угла рассеяния (в т.ч. построить график). Указание:

- (3 балла) Записать условие сохранения импульса при столкновении. Для того, чтобы исключить неинтересный импульс электрона после столкновения, удобно его одного оставить в правой части уравнения. Затем возвести это равенство 4-векторов в квадрат.
- (3 балла) В задаче есть два малых параметра: отношение энергий налетающих друг на друга фотона и электрона,  $\varepsilon/E$ , и  $1/\gamma$ , где  $\gamma$ -фактор относится к налетающему электрону. Сравните относительное влияние этих двух параметров на зависимость энергии рассеянного фотона.

- **Задача 11 (4 балла):**

Плоское зеркало движется со скоростью  $V$  в направлении своей нормали. На зеркало падает монохроматическая волна под углом  $\theta$  к нормали. Определить направление и частоту отраженной волны, считая, что для покоящегося зеркала справедлив обычный закон отражения.

## Семинар 5

Свойства стационарного электромагнитного поля

- **Задача 12 (3 балла):**

В системе отсчёта  $S$  электрическое и магнитное поле взаимно перпендикулярны:  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ . С какой скоростью относительно  $S$  должна двигаться система  $S'$ , в которой имеется только электрическое или только магнитное поле? Всегда ли существует решение и единственно ли оно.

- **Задача 13 (3 балла):**

Показать, что однородное магнитное поле  $\mathbf{H}$ , направленное по оси  $z$ , может быть описано векторным потенциалом

$$\mathbf{A} = \{0, Hx, 0\}.$$

Калибровочным преобразованием перейти к потенциалу  $\mathbf{A} = [\mathbf{H} \times \mathbf{r}] / 2$ .

- **Задача 14 (2 балла):**

Какой вид имеет уравнение для потенциала покоящегося точечного заряда в случае калибровки потенциалов условием  $\varphi = 0$ ? Чему в этом случае равен этот потенциал?

- **Задача 15 (2 балла):**

В системе отсчёта  $S$  имеется однородное электромагнитное поле  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . С какой скоростью относительно  $S$  должна двигаться система  $S'$ , в которой  $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{H}'$ ? Всегда ли существует решение и единственно ли оно. Чему равны абсолютные величины  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{H}'$ ?

## Семинар 6

Движение частицы в однородном поле: движение частицы в однородном магнитном поле; дрейф частицы в однородных скрещенных сильном магнитном и слабом электрическом полях; движение частицы в однородном электрическом поле.

- **Задача 16 (2 балла):**

Определить движение релятивистской частицы массы  $m$  и заряда  $e$  в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$ .

- **Задача 17 (6 баллов):**

Найти движение релятивистской частицы массы  $m$  и заряда  $e$  в перпендикулярных однородных и постоянных электрическом и магнитном полях  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в случае  $|\mathbf{E}| < |\mathbf{H}|$ . Определить скорость дрейфа. Предлагаемая схема решения:

- а) Записать уравнение движения частицы в системе координат, в которой электрическое поле отсутствует. (Удобно выбрать такую систему координат, скорость движения которой относительно лабораторной имеет нулевую проекцию на магнитное поле.)
- б) Записать траекторию движения частицы в лабораторной системе координат в параметрическом виде с временем в движущейся системе отсчёта в качестве параметра.
- в) Изобразить траекторию движения частицы в проекции на плоскость, нормальную к магнитному полю
- г) Для нерелятивистской частицы ( $\gamma \approx 1$ ) уравнения движения оказываются несложным решить непосредственно в лабораторной системе координат. Записать уравнения движения и убедиться в этом.

- **Задача 18 (2 балла):**

Найти движение релятивистской частицы массы  $m$  и заряда  $e$  в однородном электрическом поле  $\mathbf{E}$ .

- **Задача 19 (4 балла):**

Найти движение релятивистской частицы массы  $m$  и заряда  $e$  в перпендикулярных однородных и постоянных электрическом и магнитном полях  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в случае  $|\mathbf{E}| > |\mathbf{H}|$ . Определить направление движения на больших временах.

## Семинар 7

Сила, действующая на магнитный диполь со стороны магнитного поля. Поле, создаваемое магнитным диполем. Адиабатический инвариант.

### • *Задача 20 (6+1 баллов):*

Получить формулу  $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{H}$  для силы, действующей на магнитный диполь в неоднородном постоянном магнитном поле. Указание:

- Точное выражение для силы действующей на систему токов с плотностью  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  есть  $\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$ . Выбрав начало координат где-то внутри системы токов, представьте магнитное поле в виде аппроксимации  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{H}|_{r=0} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{H}|_{r=0}$ .
- (1 балл) Покажите, что вклад от нулевого члена разложения в силу равен нулю
- (5 баллов) Вычислите вклад от первого члена разложения. Воспользуйтесь тем, что любому аксиальному вектору  $\mu^i$  можно в однозначное соответствие поставить антисимметричный тензор  $\mu^{ik} = -\mu^{ki} = \epsilon^{ikl} \mu^l$ , а также тем, что из условия бездивергентности тока  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  следует, в частности, тождество

$$\int d^3\mathbf{r} (r^i j^k + r^k j^i) = \int d^3\mathbf{r} \partial_m (r^i r^k j^m) = 0.$$

- (1 балл) Вычислите момент сил, действующих на магнитный диполь. Указание: Для этого достаточно знать только значение поля в окрестности системы.

### • *Задача 21 (4 балла):*

Нерелятивистская частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  движется в однородном магнитном поле. Магнитное поле медленно меняется со временем — так, что изменение поля за период движения мало по сравнению с самим значением поля. Доказать, что величина  $v_{\perp}^2/H$  остаётся постоянной (т.е. является адиабатическим инвариантом), где  $v_{\perp}$  есть проекция скорости частицы на плоскость нормальную к полю. Показать, что адиабатический инвариант пропорционален величине магнитного диполя, создаваемого движением частицы по окружности. Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения  $H_1$  до  $H_2$ . Указание:

- (2 балла) Определить изменение энергии частицы за один оборот — это работа, совершаемая вихревым электрическим полем.
- (2 балла) Составить конечно-разностное уравнение с шагом в один период, его интеграл является искомым адиабатическим инвариантом.

### • *Задача 22 (3 балла):*

Вычислить магнитное поле на далёких расстояниях от системы стационарных токов.

## Семинар 8

Движение частицы в слабо неоднородном магнитном поле.

### • *Задача 23 (7 баллов):*

Найти уравнение движения ведущего центра орбиты заряженной нерелятивистской частицы и скорость дрейфа (заряд  $e$  и масса  $m$ ). Поле слабо неоднородно, т.е. слабо меняется на расстояниях порядка радиуса орбиты. Указания:

- Разделите движение частицы с траекторией  $\mathbf{r}(t)$  на быстрое движение (с большим ускорением) по окружности вокруг линии магнитного поля и на медленное движения (с малым ускорением) ведущего центра:  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\xi}(t)$ . Разделите скорость движения частицы на компоненты вдоль и поперёк линии магнитного поля  $\mathbf{H}$ ,  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{h}v_\parallel$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$  — единичный вектор направленный вдоль магнитного поля. В главном приближении  $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{v}_\perp$ .
- (1 балл) Определите величину магнитного диполя через  $\mathbf{H}$  и  $v_\perp$ .
- (1 балл) Произведите усреднение уравнения движения частицы по одному периоду быстрого движения, получив уравнение на движения ведущего центра. Для быстрого движения надо воспользоваться результатом для силы действующей на магнитный диполь.
- (1 балл) Уравнение на ведущий центр надо решать методом последовательных приближений. Малый параметр в этой схеме — отношение  $\xi/L \ll 1$ , где  $L$  — характерный масштаб изменения магнитного поля. Для скорости движения ведущего центра это разложение имеет вид  $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_\parallel + \mathbf{V}_d$ , где  $\mathbf{V}_\parallel = \mathbf{h}v_\parallel$  есть скорость движения вдоль линии магнитного поля, а  $\mathbf{V}_d$  — поперёк.
- (2 балла) Спроектируйте уравнение движения ведущего центра на направление магнитного поля. Найдите закон изменения  $v_\parallel$ . Покажите сохранение адиабатического инварианта.
- (2 балла) Спроектируйте уравнение движения ведущего центра на плоскость нормальную к магнитному полю. Найдите скорость дрейфа.

### • *Задача 24 (3 балла):*

По бесконечному прямому проводу течёт постоянный ток  $I$ . Найдите движения ведущего центра частицы, движущейся в магнитном поле этого провода. Сформулируете критерий применимости приближения слабо неоднородного магнитного поля.

### • *Задача 25 (7 баллов):*

Две соосные одинаковые катушки находятся на расстоянии  $L$  друг от друга, направление магнитного потока в них сонаправленное. По катушкам течёт ток  $I$ , погонная

плотность намотки равна  $\rho$ . Радиус катушек  $R$  мал по сравнению с  $L$ , а их длина велика по сравнению с  $L$ . Кроме того, вдоль оси катушек приложено слабое однородное электрическое поле  $E$ . Частица начинает двигаться от положения по середине между катушками на их оси, причём скорость частицы составляет угол  $(1 - \epsilon)\pi/2$  с осью, где  $\epsilon \ll 1$ . Радиус ларморовской орбиты мал по сравнению с  $L$ . Описать дальнейшее движение частицы. Указание: магнитное поле в области посередине между катушками приблизьте квадратичной зависимостью в направлении оси катушек.

## Семинар 9

Закон Кулона. Центральное-симметричное распределение зарядов и создаваемое ими поле. Мультипольное разложение. Дипольный и квадрупольный моменты.

• **Задача 26 (4 балла):**

Заряды ядра и электронного облака в основном состоянии атома водорода образуют следующую объёмную плотность заряда

$$\rho(r) = e\delta(\mathbf{r}) - \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$

где  $e > 0$  — элементарный заряд,  $a \sim 10^{-8}$  см — боровский радиус, а первое и второе слагаемое соответствуют ядру и электрону соответственно. Найти электростатический потенциал такой системы. Найти энергию взаимодействия электронного облака с ядром. Найти поправку к этой энергии, положив ядро равномерно заряженным шаром радиуса  $r_{\text{я}} \sim 10^{-13}$  см.

• **Задача 27 (2 балла):**

Определить потенциальную энергию взаимодействия двух точечных диполей с моментами  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$ .

• **Задача 28 (4 балла):**

Найти тензор квадрупольного момента равномерно заряженного эллипсоида с зарядом  $Q$  и полуосями  $a$ ,  $b$  и  $c$  относительно его центра. Найти электрическое поле на больших расстояниях, считая, что в центре эллипсоида находится компенсирующий точечный заряд  $-Q$ . Построить график угловой зависимости радиальной компоненты электрического поля в плоскости  $Oxy$  в случае, когда  $2c^2 = a^2 + b^2$ ,  $a > b$ .

## Семинар 10

Электромагнитные волны в вакууме. Гауссов монохроматический пучок, уравнение Шредингера, угол дифракции.

- **Задача 29 (1 балл):**

Чему равна Фурье-амплитуда плоской монохроматической волны?

- **Задача 30 (1 балл):**

Найти тензор энергии-импульса линейно поляризованной бегущей плоской монохроматической волны. То же для стоячей волны.

- **Задача 31 (2 балла):**

Построить одномерный волновой пакет  $\Psi$  для момента времени  $t = 0$ , выбрав распределение амплитуд по волновым векторам в виде гауссового распределения

$$a_0 \exp \left[ - \left( \frac{k - k_0}{\Delta k} \right)^2 \right],$$

где  $a_0$ ,  $k_0$ ,  $\Delta k$  - постоянные. Найти связь между шириной пакета  $\Delta x$  и интервалом волновых чисел  $\Delta k$ , вносящих основной вклад в суперпозицию.

- **Задача 32 (2 балла):**

Волновой пакет  $\Psi$  образован суперпозицией плоских волн с разными частотами. Распределение амплитуд по частоте имеет вид:

$$a_0 \exp \left[ - \left( \frac{\omega - \omega_0}{\Delta \omega} \right)^2 \right],$$

(гауссово распределение), где  $a_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\Delta \omega$  - постоянные. Найти зависимость амплитуды пакета от времени в точке  $x = 0$ . Получить связь между длительностью волнового импульса  $\Delta t$  и интервалом частот  $\Delta \omega$ .

- **Задача 33 (5 баллов):**

Рассмотрите распространение гауссового аксиально симметричного монохроматического пучка (частота  $\omega$ , направление распространения вдоль оси  $Oz$ ). Гауссов пучок имеет плоский фронт на выходе испускающего его устройства, так что при  $z = 0$  характеризуется поперечным профилем амплитуды волны  $\exp(-\rho^2/2\sigma_0)$  с действительным  $\sigma_0$ , где  $\rho^2 = x^2 + y^2$  — квадрат поперечной координаты. Сечение пучка велико по сравнению с квадратом длины волны, то есть величина  $\sigma_0 \gg \lambda^2$ , где  $\lambda$  — длина волны.

- (1 балл) Запишите волновое уравнение, перейдя к комплексным амплитудам. Волна слабо отличается от бегущей монохроматической. Выделите в амплитуде волны соответствующий быстро осциллирующий множитель и напишите уравнение на медленно меняющуюся огибающую.

- (1 балл) Замените получившееся уравнение приближённым уравнением исходя из того, что огибающая меняется вдоль направления распространения гораздо медленнее чем поперёк него.
- (1 балл) Решите получившееся уравнение Шредингера.
- (1 балл) Рассмотрев далёкие расстояния, найдите угол дифракции: по определению, угол дифракции есть угол, на который расходится пучок при удалении от источника.
- (1 балл) По мере распространения пучка волновой фронт перестаёт быть плоским. Изобразите форму волновых фронтов на расстояниях  $z \ll k\sigma_0$  и  $z \gg k\sigma_0$ .

## Семинар 11

Излучение волн нерелятивистскими источниками. Дипольное излучение; ближняя зона и волновая зона. Интенсивность излучения.

- **Задача 34 (2 балла):**

Показать, что в волновой зоне при Лоренцевой калибровке потенциалов скалярный потенциал ограниченной излучающей системы может быть выражен через векторный потенциал формулой  $\varphi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$ .

- **Задача 35 (2 балла):**

Записать уравнения, которому удовлетворяет векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , если вместо лоренцевой калибровки

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

использовать калибровку потенциалов вида  $\varphi = 0$ .

- **Задача 36 (6 баллов):**

Определить электрическое и магнитное поля гармонически колеблющегося диполя на расстояниях, много больших размеров диполя (но необязательно больших длины волны). Исходя из полученного общего результата, рассмотреть предельные случаи волновой и квазистатической зон.

- **Задача 37 (2 балла):**

Определить излучение диполя  $d$ , вращающегося в одной плоскости с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ .

## Семинар 12

Излучение одиночными движущимися с ускорением зарядами. Рассеяние света на свободных зарядах.

- **Задача 38 (2 балла):**

Электрон движется по окружности в постоянном магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Найти закон изменения его кинетической энергии во времени  $\mathcal{E}(t)$ . Найти траекторию электрона в нерелятивистском пределе  $v \ll c$ .

- **Задача 39 (4 балла):**

Найти энергию излучения релятивистского электрона в однородном магнитном поле за один оборот, а также закон изменения энергии электрона и радиуса его орбиты со временем за счет потерь на излучение. Найти мощность синхротронного излучения в ускорителе на встречных пучках электронов и позитронов с энергией 100 ГэВ. Длина окружности ускорителя 30 км, число ускоряемых частиц в кольце —  $5 \cdot 10^{12}$ . Оценить характерную длину волны излучения.

- **Задача 40 (4 балла):**

Определить частоту ( $\omega'$ ) света, рассеянного движущимся зарядом. Считать, что в системе отсчёта, где электрон покоится, энергия квантов света (фотонов) мала по сравнению с его массой покоя.

## Семинар 13

Запаздывающие потенциалы Лиенара-Вихерта

- **Задача 41:**

Показать, что электрическое поле равномерно движущегося точечного заряда "сплющивается" в направлении движения. При этом происходит ослабление поля  $E$  на линии движения по сравнению с кулоновым полем. Как согласуется это ослабление с формулой преобразования  $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$ ?

- **Задача 42:**

Найти потенциалы и поля  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  точечного заряда  $q$ , движущегося равномерно со скоростью  $\mathbf{V}$ , произведя преобразование Лоренца от системы отсчёта, где заряд покоится.

- **Задача 43:**

Релятивистский электрон пролетает со скоростью  $V$  через плоский конденсатор, к которому приложено переменное электрическое поле с частотой  $\omega_0$ . Найти частоту излучения электрона в зависимости от угла  $\theta$  между наблюдателем и направлением движения электронного пучка.