

Институт Теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

На правах рукописи

УДК 532.51 532.6

ВЕРГЕЛЕС Сергей Сергеевич

Реологические свойства везикулярной суспензии

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., чл.-корр. РАН

Лебедев В.В.

Москва – 2008

Содержание

Введение	5
Глава 1. Квазисферические везикулы во внешнем потоке скорости	14
1.1. Основные соотношения	14
1.1.1. Описание везикулы	14
1.1.2. Течение вблизи везикулы	16
1.1.3. Силы на мембране	18
1.1.4. Параметризация поверхности везикулы	20
1.2. Слабые течения	21
1.2.1. Теория возмущений	22
1.2.2. Равновесие	23
1.2.3. Слабые внешние течения, феноменология	26
1.3. Общий вид уравнения движения	28
1.3.1. Сферическая гармоника второго порядка	30
1.3.2. Перемасштабированное уравнение	31
1.4. Плоское внешнее течение	34
1.4.1. Общее рассмотрение	34
1.4.2. Симметричное решение	36
1.4.3. Прецессирование	37
1.5. Фазовая диаграмма	39
1.5.1. Переход из режима параллельного переноса в режим покачивания	40
1.5.2. Переход из режима параллельного переноса в режим кувыркания	42
1.5.3. Полная фазовая диаграмма	46
1.6. Предельные случаи	49

1.6.1. Почти вращательные течения и предел большого контраста вязкости	49
1.6.2. Чисто растягивающее течение	51
1.6.3. Слабые внешние течения	51
1.7. Сильное внешнее течение	53
1.7.1. Усечённые уравнения	53
1.7.2. Медленная динамика	55
1.7.3. Сверхсильные течения	58
1.8. Заключение	60
Глава 2. Реологические свойства взвеси везикул	63
2.1. Эффективная вязкость суспензии	63
2.2. Средняя по времени эффективная вязкость	65
2.3. Влияние тепловых флуктуаций	67
2.4. Заключение	71
Глава 3. Образование “морщинок” на везикуле, помещённой во внешний переменный поток	73
3.1. Неустойчивости формы мембран	73
3.2. Уравнение, описывающее динамику везикулы в переменном внешнем потоке	74
3.3. Порог неустойчивости	77
3.4. Процесс образования и развития морщинок	78
3.5. Заключение	83
Заключение	84
Приложение А. Вывод уравнения движения везикулы во внешнем течении	87

А.1. Криволинейные координаты на поверхности	87
А.1.1. Вспомогательная поверхность – сфера	89
А.2. Решение Ламба	90
А.3. Получение уравнения движения в главном приближении по малому параметру $\sqrt{\Delta}$	93
А.4. Высшие поправки к граничным условиям.	97
Приложение Б. Эффективная вязкость суспензии	99
Литература	102

Введение

Везикула представляет собой каплю жидкости, ограниченную мембраной, и погружённую в другую жидкость. В этой работе рассматриваются везикулы, у которых мембрана состоит из двойного слоя липидных молекул.

Мембраны являются неотъемлемым элементом живых клеток. Из них состоят стенки клеток и стенки органелл внутри этих клеток. Мембраны участвуют во множестве процессов, происходящих в клетке. Одной из главных функций мембраны является, с одной стороны, сохранение химического состава клетки (органеллы) отличным от химического состава окружающей среды, а с другой стороны — обмен с окружающей средой через встроенные в мембрану белки [1].

Другая важная функция мембран состоит в образовании везикул. Одним из способов внутриклеточного обменного процесса является перенос везикулами внутри себя белков от места их синтеза к месту их назначения [1]. По аналогии с этой природной функцией везикул возможно их использование в фармакологии в качестве поставщиков лекарств к больному органу, см. например [2]. Лекарства являются вообще говоря ядами для всего организма, но необходимыми для больного органа. Везикулы годятся для решения этой проблемы, поскольку на не слишком больших временах мембрана остаётся непроницаемой для внутреннего раствора.

Другой тип функций мембран вытекает из их механических свойств. Эти свойства играют существенную роль в определении формы клетки (органеллы). Механическими свойствами стенок красных кровяных телец частично объясняется их динамическое поведение при течении крови по сосудам. Предлагаемая работа посвящена изучению динамики везикул, также тесно связанной с механическими свойствами мембраны.

Даже самая простая модель, описывающая механические свойства мембраны [3], приводит к широкому разнообразию свойств мембран в целом и везикул в частности [4]. В зависимости от отношения объёма везикулы и её площади поверхности

везикула принимает весьма разнообразные стационарные формы [5].

Динамика мягких деформируемых объектов вообще и везикул в частности во внешнем потоке в последнее время привлекает широкое внимание исследователей. Эксперименты показывают, что биологические клетки, микрокапсулы и везикулы, будучи помещёнными во внешнюю текущую жидкость, испытывают несколько типов движения [6–12]. В классической работе [13] было указано на близкое соответствие типов движения во внешнем потоке везикул и красных кровяных телец. Поэтому одной из причин повышенного интереса к динамическим свойствам везикул является то, что везикула является упрощённой моделью красных кровяных телец. В определённых пределах, описанных ниже, механические свойства везикулы могут быть полностью описаны аналитически, и детальное их знание может дать ключ к пониманию механических свойств красных кровяных телец.

В экспериментах с везикулами, помещёнными во сдвиговое течение, наблюдалось три возможных динамических режима. В режиме параллельного переноса (tank-treading) форма везикулы остаётся постоянной при ненулевом поверхностном течении мембраны. В режиме кувыркания (tumbling) везикула периодически переворачивается в плоскости наложенного сдвигового течения. Режим покачивания (trembling), обнаруженный недавно в [12], является промежуточным режимом между режимами параллельного переноса и кувыркания. В этом режиме главная ось везикулы колеблется вблизи направления скорости внешнего потока, не совершая тем не менее полных оборотов. Этот режим также обсуждался в теоретической работе [14], где он был назван словосочетанием “vacillating-breathing”, и в работе [15], основанной на численном счёте, где он был назван “swinging”. Различные типы движения везикулы изображены на Рис. 1.

Теоретическое описание движения везикулы оказалось достаточно трудной задачей, главным образом вследствие нелинейной и нелокальной природы уравнений, описывающих движение везикулы. Были предложены различные подходы

для исследования этой проблемы. В частности, было применено численное моделирование везикулы, основанное на методе граничных элементов (boundary-element method) [16, 17], на представлении динамики всей системы как совокупной динамики мезоскопических частиц (mesoscopic particle-based approximation) [18–22] и на так называемом методе переносимого поля (advected field approach) [23–26].

Хотя эти исследования и улучшили понимание динамики везикулы, они не могут полностью предсказывать тип её движения для наперёд заданных значений физических параметров везикулы и внешнего потока. Существующие аналитические исследования динамики везикулы основаны либо на расширении феноменологической модели, предложенной Келлером и Скалаком [13], см. [15, 19, 27], или относятся к анализу частного случая квази-сферических везикул, для которого возможно развить теорию возмущений [14, 28–30] по степени несферичности везикулы. Этот последний подход оказывается наиболее продуктивным, поскольку он допускает полный математически строгий анализ механического поведения везикулы.

Впервые исследование поведения отдельной квази-сферической везикулы во внешнем потоке было предпринято в теоретической работе [29]. Первые теоретические предсказания для случая, когда вязкость внутренней жидкости отличается от вязкости внешней, были представлены в работах [14, 28]. В этих работах не было учтено влияние изгибных сил мембраны, которые несмотря на свою относительно малость оказываются важными и сильно меняют фазовую диаграмму динамических режимов везикулы. Значение изгибных сил мембраны было сначала обнаружено численным моделированием [15], а затем последовательно учтено в работах [31, 32], ставших материалом для предлагаемой диссертации.

Мы проводим систематическое исследование динамики квази-сферической везикулы в водном растворе, рассматривая достаточно распространённую ситуа-

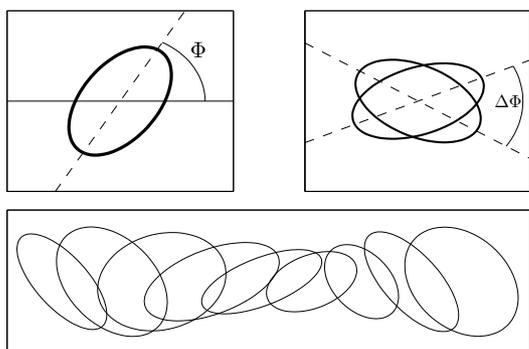


Рис. 1. Проекция везикулы на плоскость сдвигового течения, когда она находится в режимах параллельного переноса, покачивания и кувыркания.

цию, когда мембрана является вязкой двумерной жидкостью, жидкости, окружающие мембрану, имеют разные вязкости, а внешнее течение лежит в плоскости. Мы показываем, что в этом случае в зависимости от отношения вязкостей и значения градиента скорости внешнего течения везикула может испытывать все три экспериментально наблюдаемые типа движения. Оказывается удобным построить соответствующую фазовую диаграмму, иллюстрирующую соответствие между физическими параметрами системы и реализацией того или иного динамического режима. Мы определяем два типа бифуркаций, которые соответствуют переходам из режима параллельного переноса в режимы кувыркания и покачивания. Нами проанализировано “критическое” замедление вблизи линий переходов и вблизи точки соединения двух линий переходов. Наконец, мы обнаружили до сих пор экспериментально не наблюдавшийся режим движения везикулы, который мы назвали прецессированием (spinning). Как мы показываем, этот режим должен наблюдаться при относительно больших значениях градиента скорости и контраста вязкости внутренней и внешней жидкостей.

Следующим пунктом нашего исследования являются реологические свойства взвеси везикул. Изучение реологических свойств взвеси частиц микроскопического размера имеет большой интерес вследствие их широкого распространения в

технике и в биологии, где главным примером суспензии является кровь. Суспензия твёрдых шариков как самого простого вида частиц была рассмотрена в работе А. Эйнштейна [33]. Впоследствии результаты [33] были обобщены на случай, когда частицами являются капли другой жидкости с отличной вязкостью в пределе сильного поверхностного натяжения [34].

Реологические свойства суспензии везикул вытекают из свойств динамики отдельной везикулы во внешнем заданном потоке. Поэтому при исследовании реологических свойств суспензии в Главе 2, основанной на результатах работы [35], мы опираемся на результаты, полученные нами для динамики отдельной везикулы в Главе 1.

Везикула получается из простой капли жидкости путём разделения внутренней и внешней жидкостей мембраной, которая является сравнительно мягким объектом. Поэтому в отличие от твёрдых шариков и рассмотренных в [34] капель с большим поверхностным натяжением, препятствующим деформации капли, везикула может изменять свою форму. Это приводит к более сложным реологическим свойствам суспензии везикул. Как показано в Главе 2, где мы рассмотрели частный случай плоского стационарного течения, эффективная вязкость везикулярной суспензии зависит от геометрических характеристик течения. Кроме того, для некоторых геометрий потока вязкость суспензии зависит от её исходного состояния, поскольку в таких потоках везикулы могут находиться в разных локально устойчивых динамических режимах – режимах кувыркания и прецессирования. В более общем случае переменного течения должен наблюдаться ещё один эффект – зависимость вязкости суспензии не только от мгновенного значения градиента скорости, но и от значения градиента скорости в предшествующие времена. Все перечисленные эффекты показывают, что в отличие от взвеси твёрдых шариков, взвесь везикул нельзя рассматривать как ньютоновскую жидкость.

В последней Главе 3 мы рассматриваем динамику везикулы, помещённой во

внешний резко изменяющийся поток. Как было установлено в Главе 1, везикула, помещённая в постоянный внешний поток, может находиться в различных динамических режимах, в зависимости от параметров везикулы и градиента внешнего потока. Тем не менее, во всех этих режимах форма квази-сферической везикулы остаётся гладкой: на поверхности везикулы не образуется возмущений с длиной волны много меньше размера везикулы. В эксперименте [36] везикула, помещённая в нестационарный внешний поток, испытывает динамику, сильно отличающуюся от описанной выше. Процесс релаксации везикулы в изменившемся внешнем потоке сопровождается возбуждением высших гармоник, которые выглядят как морщинки на поверхности везикулы, за что и получили своё название.

Сморщивание тонких плёнок является хорошо известным эффектом, который можно наблюдать в том числе и в повседневной жизни. Морщинки на плёнках обычно появляются вследствие приложения к ним внешних анизотропных напряжений, или в результате попытки сжатия несжимаемых плёнок. Основные свойства стационарной и/или равновесной структуры морщинок к настоящему времени хорошо изучены [37, 38]. Намного меньше известно о динамике морщинок. Морщинки испытывают нетривиальные процессы роста и спада. В экспериментах с везикулами [36, 39] морщинки на мембране появляются вследствие большого отрицательного значения поверхностного натяжения. Причины возникновения такого значения поверхностного натяжения могут быть разными [36, 39]. В Главе 3 мы описываем эволюцию морщинок, ориентируясь на эксперимент [36]. Мы показываем, что в эволюции морщинок есть универсальный режим, который возникает во всех системах, где начальная длина возбуждённых тем или иным способом морщинок оказывается много меньше характерного размера всей системы, а поверхностное натяжение мембраны перестаёт зависеть от внешних условий.

Упомянем здесь также эксперимент [40] и теоретическое исследование [41], посвящённые образованию морщинок на капсулах во внешнем сдвиговом потоке.

Не смотря на кажущуюся близость к нашей теме эффекта, исследовавшегося в этих работах, физические механизмы и основные свойства морщинок в [40, 41] и исследуемых нами морщинок [36] существенно различны. Например, морщинки, наблюдаемые на везикулах, нестационарны и возбуждаются на ограниченный промежуток времени.

Опишем теперь структуру диссертации.

Глава 1 содержит описание везикулы и её основных свойств, а также исследование динамики отдельной везикулы во внешнем потоке. В Пункте 1.1 Главы 1 мы производим обзор основных теоретических фактов, касающихся физических свойств мембраны. Особое внимание уделено динамическим свойствам мембраны, которая может быть представлена как поверхность, помещённая в трёхмерную жидкость. В Пункте 1.2 мы обсуждаем квази-сферические везикулы, исследуем их свойства в состоянии равновесия, а также выводим феноменологическое уравнение, описывающее динамику везикулы во внешнем слабом потоке. В Пункте 1.3 мы получаем уравнение, описывающее динамику квази-сферической везикулы путём разложения по малому отклонению формы везикулы от сферической. Мы определяем безразмерные параметры, которые определяют тип движения везикулы. В Пункте 1.4 мы ограничиваемся на случай плоского течения. Оказывается возможным найти решения динамического уравнения, соответствующие режимам параллельного переноса, покачивания, кувыркания и прецессирования. В Пункте 1.5 мы исследуем фазовую диаграмму системы, бифуркации, соответствующие переходу из режима параллельного переноса в режимы покачивания и кувыркания, “критическое” замедление динамики везикулы близи соединения линий переходов. В Пункте 1.6 мы исследуем некоторые предельные случаи, в частности чисто растягивающее и почти вращающее внешнее течение, а также получаем выражение для феноменологической константы, описывающей движение везикулы во внешнем слабом течении. В Пункте 1.7 мы подробно исследуем случай сильных

внешних течений. Наконец, в Заключение 1.8 мы делаем некоторые выводы.

Отметим недавнюю теоретическую работу [42], где разрабатывается схема вычислений, близкая к развиваемой нами в Главе 1. Авторы воспроизводят уравнения, полученные нами в [31] с добавлением некоторых новых членов. Мы проводим исследование степени влияния этих членов на динамику везикулы в Пункте 1.7.

Глава 2 посвящена изучению реологических свойств взвеси везикул. В Пункте 2.1 приведены общие формулы, выписанные в удобной для нас форме. Этими формулами скорость диссипации энергии во взвеси связывается со средней скоростью потока и скоростью жидкости вблизи везикул. Кроме того, выписана связь между скоростью диссипации энергии на отдельной везикуле с текущей формой везикулы и скоростью её изменения. Основываясь на результатах Главы 1, касающихся законов движения везикулы, в Пункте 2.2 мы получаем окончательные выражения для эффективной вязкости суспензии везикул. В Пункте 2.3 учтено влияние тепловых флуктуаций на динамику везикулы и, как следствие, на значение эффективной вязкости суспензии.

В Главе 3 мы возвращаемся к исследованию поведения отдельной везикулы, но теперь уже в переменном растягивающем потоке. В Пункте 3.1 мы показываем механизм, возникающий в условиях отрицательного поверхностно натяжения и приводящий к возникновению неустойчивостей формы мембраны. В Пункте 3.2 мы выписываем уравнение, описывающее динамику формы поверхности везикулы в процессе её релаксации в изменившемся внешнем потоке, и исследуем его решение ниже порога неустойчивости. В Пункте 3.3 мы получаем значение порога неустойчивости по силе внешнего течения, выше которого на поверхности везикулы начинают образовываться морщинки. В Пункте 3.4 мы описываем эволюцию морщинок, включающую в себя процесс роста и спада. В частности, мы устанавливаем нетривиальную степенную зависимость характерной длины волны

морщинок от силы внешнего потока.

В **Заключении** мы делаем краткий обзор главных результатов диссертации.

Детали громоздких вычислений вынесены в Приложение А, а некоторые общие соотношения, касающиеся вязкости суспензий, приведены в Приложении Б.

Квазисферические везикулы во внешнем потоке скорости

1.1. Основные соотношения

Физические свойства мембран подвергаются интенсивному исследованию в последние три десятилетия. Основные результаты в этой области могут быть найдены в [43–49]. Здесь мы рассматриваем простейший тип мембраны – двойной липидный слой. Такие мембраны обычно используются в гидродинамических экспериментах с везикулами. Здесь мы приводим основные теоретические положения, касающиеся эластичности мембраны, которые в дальнейшем мы используем при написании динамических уравнений, описывающих движение везикулы. Мы учитываем как изгибную упругость мембраны, так и её внутреннюю вязкость, которая может играть заметную роль вблизи точки главного фазового перехода мембраны [50].

1.1.1. Описание везикулы

Мы исследуем процессы, происходящие на масштабах порядка размера везикулы, который предполагается много бóльшим толщины мембраны. Это предположение хорошо выполняется для “гигантских” везикул, которые обычно используются в экспериментах. В этом случае в главном приближении мембрана может рассматриваться как двумерная бесконечно тонкая плёнка, погружённая в трёхмерную жидкость и разделяющая разные области жидкости.

Мы предполагаем, что мембрана везикулы непроницаема для окружающей её жидкости. Кроме того, напряжения, возникающие на мембране малы в том смысле, что сохраняется её поверхностная плотность. Эти два свойства обеспечивают

сохранение объёма везикулы \mathcal{V} и её площади поверхности \mathcal{A} . Степень отклонения формы везикулы от сферической можно характеризовать безразмерным сохраняющимся во времени параметром Δ , который вводится через соотношения

$$\mathcal{A} = (4\pi + \Delta)R^2, \quad \mathcal{V} = 4\pi R^3/3 \quad (1.1)$$

где R является “радиусом” везикулы, определённым через её объём. Избыточная площадь является неотрицательной величиной $\Delta \geq 0$, а её минимальное значение $\Delta = 0$ соответствует точно сферической форме. Квази-сферические везикулы определяются условием $\Delta \ll 1$.

Энергия мембраны вследствие сохранения её поверхностной плотности задаётся только её формой и может быть записана в виде следующего поверхностного интеграла [51–54]

$$\mathcal{F}^{(b)} = \int dA (\kappa H^2/2 + \bar{\kappa}K), \quad (1.2)$$

по поверхности мембраны. В (1.2) κ и $\bar{\kappa}$ называются модулями изгиба, H и K являются средней и гауссовой кривизнами. Они связаны с локальными радиусами кривизны мембраны R_1 и R_2 как

$$H = R_1^{-1} + R_2^{-1}, \quad K = R_1^{-1}R_2^{-1}. \quad (1.3)$$

Согласно теореме Гаусса-Бонне, второе слагаемое в правой части ур. (1.2) инвариантно относительно гладких преобразований формы мембраны. Следовательно, этот член не играет роли в задачах, где топология везикулы остаётся постоянной.

Заметим, что мы опустили слагаемое, соответствующее спонтанной кривизне мембраны. В выражении (1.2) подразумевается, что мембрана является симметричной, что типично для липидных бислоёв. Говоря более точно, мы считаем, что спонтанная кривизна мембраны много больше размера везикулы. Это предположение представляется оправданным для большинства экспериментов с гигантскими везикулами.

Помимо изгибной энергии (1.2) мембрана характеризуется также поверхностным натяжением σ . В нашем случае поверхностное натяжение можно рассматривать как вспомогательную переменную, которая, подстраиваясь под нестационарную форму мембраны и внешнее течение, обеспечивает несжимаемость мембраны. Значение поверхностного натяжения может значительно меняться вдоль поверхности мембраны.

1.1.2. Течение вблизи везикулы

Рассмотрим случай, когда содержащаяся внутри везикулы и окружающая её жидкости являются ньютоновскими. Мы предполагаем, что число Рейнольдса для обеих жидкостей, связанное с движением везикулы, пренебрежимо мало, что выполняется в экспериментах с микро-течениями [6–11, 11, 12]. При таких предположениях жидкости описываются уравнением Стокса

$$\rho \partial_t \mathbf{v} = \eta \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla P, \quad (1.4)$$

где P — давление, \mathbf{v} — скорость жидкости, ρ — массовая плотность, а η — сдвиговая вязкость. Уравнение (1.4) должно быть дополнено условием несжимаемости $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, которое приводит к уравнению Лапласа на давление, $\nabla^2 P = 0$.

Разделим течение вблизи везикулы на две части: внешнее течение, которое наблюдалось бы в отсутствии везикулы и индуцированное течение, которое возникает в результате реакции везикулы на внешнее течение. Мы предполагаем внешнее течение стационарным либо медленно меняющимся во времени. Здесь нужно отметить, что поскольку везикула переносится течением, то это условие должно выполняться в лагранжевой системе координат, связанной с везикулой. Ниже мы пренебрегаем в ур. (1.4) членом с производной по времени вследствие того, что характерное время, связанное с динамикой везикулы, оказывается много большим по сравнению со временем вязкой релаксации жидкости $\rho R^2 / \eta$.

Будем считать, что характерный пространственный масштаб изменения внешнего течения много больше размера везикулы. В этом случае скорость \mathbf{V} внешнего течения вблизи везикулы может быть приближена линейным профилем, определяющимся матрицей градиентов скорости $\partial_k V_i$. Вследствие условия несжимаемости жидкости матрица $\partial_k V_i$ является бесследовой. В общем случае можно выделить два вклада во внешнее течение, растягивающий и вращающий:

$$\partial_k V_i = s_{ik} - \epsilon_{ikj} \omega_j, \quad (1.5)$$

где \hat{s} – матрица растяжения (симметричная часть матрицы $\partial_k V_i$), ϵ_{ikj} – абсолютно антисимметричный тензор, а $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости. Сила растяжения характеризуется величиной s , определяемой как $s^2 = (1/2)\text{tr } \hat{s}^2$. Отметим здесь, что для сдвигового течения $s = |\boldsymbol{\omega}| = \dot{\gamma}/2$, где $\dot{\gamma}$ – величина сдвигового течения.

В общем случае жидкости внутри и снаружи везикулы различны. Мы обозначаем вязкость внешней жидкости η , тогда как $\tilde{\eta}$ означает вязкость внутренней жидкости. Важным параметром, управляющим переходом везикулы из режима параллельного переноса в режим кувыркания, является контраст вязкости $\tilde{\eta}/\eta$. Предел, в котором контраст вязкости стремится к бесконечности, соответствует твердотельному поведению везикулы, которая сохраняет равновесную форму. Поведение твёрдого тела во внешнем потоке было впервые изучено Джеффери [55] на примере эллипсоидальных частиц.

Мембрана переносится жидкостью, поле скорости \mathbf{v} непрерывно на мембране и определяет как скорость жидкости, так и скорость мембраны. Как уже говорилось выше, для медленных процессов, которые мы изучаем, мембрана может считаться локально несжимаемой, что приводит к ограничениям на скорость \mathbf{v}

$$\partial_i^\perp v_i = 0, \quad \text{где } \partial_i^\perp = \delta_{ik}^\perp \partial_k, \quad (1.6)$$

на мембране. В (1.6) δ_{ik}^\perp является проекционным оператором на мембрану, который может быть записан в виде $\delta_{ik}^\perp = \delta_{ik} - \ell_i \ell_k$, где $\boldsymbol{\ell}$ есть единичный вектор,

нормальный к мембране. Трёхмерное условие несжимаемости $\nabla \mathbf{v} = 0$ совместно с (1.6) приводит к соотношению

$$\ell_i \ell_k \partial_i v_k = 0, \quad (1.7)$$

которое должно выполняться на обеих сторонах мембраны.

1.1.3. Силы на мембране

Реакция мембраны характеризуется её тензором поверхностных напряжений $T_{ik}^{(s)}$. В выбранной нами модели существует три вклада в этот тензор, связанных с вариацией изгибной энергии (1.2), поверхностным натяжением, и внутренней вязкостью мембраны:

$$T_{ik}^{(s)} = T_{ik}^{(\kappa)} - \sigma \delta_{ik}^\perp - \zeta \delta_{ij}^\perp \delta_{kn}^\perp (\partial_j v_n + \partial_n v_j). \quad (1.8)$$

Здесь σ есть поверхностное натяжение, а ζ – поверхностная вязкость мембраны. Выражение для вклада в тензор поверхностных напряжений от изгибных сил было найдено в [56] (см. также книгу [57]). Этот тензор может быть записан в виде

$$T_{ik}^{(\kappa)} = \kappa \left(-\frac{1}{2} H^2 \delta_{ik}^\perp + H \partial_i^\perp \ell_k - \ell_i \partial_k^\perp H \right), \quad (1.9)$$

где H есть средняя кривизна мембраны и ∂_i^\perp определено в (1.6).

Поверхностная сила \mathbf{f} (сила на единицу поверхности) связанная с тензором напряжений мембраны $T_{ik}^{(s)}$ вычисляется согласно равенству $f_i = -\partial_k^\perp T_{ik}^{(s)}$. Три вклада в поверхностную силу

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(\kappa)} + \mathbf{f}^{(\sigma)} + \mathbf{f}^{(v)}, \quad (1.10)$$

могут быть получены из (1.8,1.9):

$$f_i^{(\kappa)} = \kappa [H (H^2/2 - 2K) + \Delta^\perp H] \ell_i, \quad (1.11)$$

$$f_i^{(\sigma)} = -H \sigma \ell_i + \partial_i^\perp \sigma, \quad (1.12)$$

$$f_i^{(v)} = \zeta [\delta_{ij}^\perp \Delta^\perp v_j - H \ell_n \partial_i^\perp v_n - 2 \ell_i (\partial_n^\perp \ell_j) \partial_j^\perp v_n]. \quad (1.13)$$

Здесь снова H и K суть средняя и гауссова кривизны мембраны, а Δ^\perp – оператор Лапласа-Бельтрами, $\Delta^\perp = \partial_i^\perp \partial_i^\perp$, на поверхности мембраны. Заметим, что выражения для сил (1.11,1.12) могут быть также получены путём вычисления вариации свободной энергии мембраны (1.2) по бесконечно малым смещениям элементов мембраны [58].

Поверхностная сила \mathbf{f} компенсируется потоком момента импульса из окружающей среды на мембрану. Этот поток состоит из двух частей, возникающих из давления и вязких сил жидкости. В результате подведения баланса приходим к следующим соотношениям:

$$-\kappa[H(H^2/2 - 2K) + \Delta^\perp H] + \sigma H + 2\zeta \partial_i^\perp \ell_n \partial_n^\perp v_i = P_{\text{in}} - P_{\text{out}}, \quad (1.14)$$

$$\partial_i^\perp \sigma + \zeta(\delta_{ij}^\perp \Delta^\perp v_j - H \ell_n \partial_i^\perp v_n) = \ell_k [\tilde{\eta}(\partial_i v_k + \partial_k v_i)_{\text{in}} - \eta(\partial_i v_k + \partial_k v_i)_{\text{out}}] \quad (1.15)$$

для нормальной и тангенциальной к мембране компонент силы. Здесь мы для определённости фиксируем, что единичный вектор ℓ направлен наружу везикулы, а индексы ‘in’ и ‘out’ означают внутреннюю и внешнюю области везикулы соответственно. Таким образом, $P_{\text{in}} - P_{\text{out}}$ есть скачок давления, наблюдающийся при пересечении мембраны из внешней во внутреннюю область везикулы. Заметим, что в (1.14) отсутствует вклад от вязких сил жидкости, что вытекает из условия несжимаемости (1.7).

Для того, чтобы найти поле скорости при заданной форме мембраны нужно решить стационарное уравнение Стокса $\eta \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla P$ (отдельно внутри и вне везикулы) с учётом граничных условий (1.6,1.14,1.15) на мембране. Ещё одним граничным условием является требование, чтобы $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{V}$ при удалении от везикулы. Здесь заметим, что вследствие линейности уравнений и граничных условий на скорость решение уравнений может быть записано в виде суммы

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(s)} + \mathbf{v}^{(\omega)} + \mathbf{v}^{(\kappa)}, \quad (1.16)$$

где $\mathbf{v}^{(s)}$ и $\mathbf{v}^{(\omega)}$ пропорциональны растяжению и угловой скорости, возникающих

из градиента скорости внешнего течения (1.5), а $\mathbf{v}^{(\kappa)}$ пропорционально модулю изгиба κ . Конечно, все слагаемые в (1.16) являются сложными функциями формы везикулы.

Заметим, что без слагаемого с множителем κ граничные условия (1.14,1.15) инвариантны по отношению к преобразованию $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$, $P \rightarrow -P$, $\sigma \rightarrow -\sigma$. Стационарное уравнение Стокса $\eta \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla P$ и граничное условие (1.6) также остаются инвариантными при этом преобразовании. Кинематическое условие (1.20) становится также инвариантным, если преобразование дополнить правилом $t \rightarrow -t$. Таким образом, в этом приближении обратная по времени эволюция смещения u эквивалентна прямой эволюции во времени во внешнем течении, имеющем скорость $-\mathbf{V}$. Вследствие того, что динамика везикулы определяется матрицей градиентов (1.5), преобразование $\mathbf{V} \rightarrow -\mathbf{V}$ эквивалентно пространственной инверсии. Из этого факта вытекает некоторая дополнительная симметрия, приводящая к существенным следствиям в динамике везикулы. Мы исследуем эти следствия более детально для случая плоского внешнего течения.

1.1.4. Параметризация поверхности везикулы

В дальнейшем мы используем следующую параметризацию поверхности везикулы:

$$r = R[1 + u(\vartheta, \phi)], \quad (1.17)$$

где R определяется соотношением (1.1). В (1.17) r, ϑ, ϕ суть радиус, азимутальный и полярный углы в системе отсчёта с началом в центре масс везикулы. Безразмерное радиальное смещение u определяет отклонение формы мембраны от сферической.

Два условия, условие сохранения объёма везикулы и условие сохранения избыточной площади везикулы (1.1), записанные в терминах функции смещения u ,

выглядят как

$$\int d\phi d\vartheta \sin \vartheta (u + u^2 + u^3/3) = 0, \quad (1.18)$$

$$\int d\phi d\vartheta \sin \vartheta \left\{ (1 + u) \left[(1 + u)^2 + (\partial u / \partial \vartheta)^2 + \frac{(\partial u / \partial \phi)^2}{\sin^2 \vartheta} \right]^{1/2} - 1 \right\} = \Delta. \quad (1.19)$$

Соотношения (1.18,1.19) являются формально точными. Они, однако, могут быть непосредственно применимы только в случае, если $u(\vartheta, \phi)$ есть однозначно определённая функция.

Перенос мембраны окружающей жидкостью даёт следующее кинематическое соотношение:

$$\partial_t u = \frac{1}{R} v_r - \frac{1}{r} \left(v_\vartheta \partial_\vartheta u + \frac{1}{\sin \vartheta} v_\phi \partial_\phi u \right). \quad (1.20)$$

Здесь v_r, v_ϑ, v_ϕ суть компоненты вектора скорости \mathbf{v} в ортонормированной сферической системе координат, взятого на поверхности мембраны, т.е. при r , определённом равенством (1.17). Как и выше, равенство (1.20) является формально точным, но может быть использовано только если $u(\vartheta, \phi)$ является однозначно определённой функцией.

1.2. Слабые течения

Форма везикулы зависит от силы внешнего течения. В слабых течениях форма везикулы близка к равновесной, тогда как в сильных течениях в общем случае форма определяется градиентом скорости внешнего потока (1.5). В этом пункте мы рассматриваем первый случай. Равновесная форма везикулы может быть найдена минимизацией свободной энергии везикулы [59]. Для квази-сферической везикулы равновесной формой является вытянутое аксиально-симметричное тело с центром инверсии, близкое к вытянутому эллипсоиду вращения. Воспользовавшись этим, мы развиваем феноменологическое описание динамики везикулы,

в котором форма везикулы полностью описывается направлением главной оси везикулы.

1.2.1. Теория возмущений

В этом пункте мы рассматриваем квази-сферические везикулы, для которых параметр Δ избыточной площади везикулы, введённый в (1.1), мал, $\Delta \ll 1$. В этом случае безразмерное смещение u мало и оказывается возможным развить теорию возмущений, которая строится как разложение по u . Это разложение является основой для нашего дальнейшего анализа.

Естественно представить функцию $u(\vartheta, \phi)$ в виде разложения по сферическим гармоникам:

$$u = \sum_{l,m} u_{l,m} \mathcal{Y}_{l,m}(\vartheta, \phi), \quad (1.21)$$

где $\mathcal{Y}_{l,m}$ – сферические функции. Однородный вклад в u , т.е. $u_{0,0}$, может быть выражен через неоднородную часть (совокупность гармоник с $l > 0$) через соотношение (1.18), которое отражает закон сохранения объёма. Подставляя получающееся выражение для нулевой сферической гармоники в (1.19), получаем выражение для Δ , разложение которого по u начинается с квадратичного слагаемого. Таким образом, амплитуда смещения u может быть оценена как $\sqrt{\Delta}$.

Вклады в u , связанные со сферическими гармониками разных порядков, играют разные роли. Нулевая гармоника $u_{0,0}$, как это было показано, может быть исключена из рассмотрения. Сферическая гармоника первого порядка соответствует смещению везикулы как целого, и поэтому оказывается не важной для нашего анализа. Основную роль играет сферическая гармоника второго порядка, которая определяет форму везикулы. Скорости релаксации высших сферических гармоник много больше в сравнении со скоростью релаксации второй гармоники. Следовательно, для относительно медленных процессов, которые мы рассматриваем в этой главе, высшие гармоники оказываются слабо возбуждёнными и их

вкладом в форму везикулы можно пренебречь.

Подчеркнём, что пренебрежение влиянием высших гармоник возможно только в квази-стационарных внешних потоках. В Главе X (см. также экспериментальную работу [36]) мы рассмотрим ситуацию, когда при резкой смене чисто растягивающего потока на обратный, происходит образование “морщинок” на поверхности везикулы, т.е. вырастает амплитуда высших гармоник.

1.2.2. Равновесие

В отсутствии внешнего течения везикула имеет равновесную форму, которая может быть найдена минимизацией эффективной свободной энергии

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(b)}(u) + \bar{\sigma} R^2 \Delta(u), \quad (1.22)$$

где первый член соответствует выражению (1.2) и $R^2 \Delta$ есть избыточная площадь везикулы, записанная в терминах смещения u . Лагранжев множитель $\bar{\sigma}$, обеспечивающий сохранение площади мембраны, совпадает со значением поверхностного натяжения, когда везикула находится в состоянии равновесия. Второй множитель Лагранжа, связанный с объёмом \mathcal{V} , отсутствует в (1.22) вследствие того, что нулевая сферическая гармоника в разложении смещения u предполагается выраженной через остальные из соотношений (1.18). Таким образом, в этой схеме объём сохраняется автоматически.

Если Δ мало, главные вклады как в энергию (1.2), так и в избыточную площадь квадратичны по u . Удобно записать эти вклады в терминах коэффициентов $u_{l,m}$ разложения (1.21) функции $u(\vartheta, \phi)$ по сферическим гармоникам:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(2)} = & \frac{\kappa}{2} \sum_{l \geq 2, m} (l+2)(l+1)l(l-1) |u_{l,m}|^2 + \\ & + \frac{1}{2} \bar{\sigma} R^2 \sum_{l \geq 2, m} (l+2)(l-1) |u_{l,m}|^2. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Заметим, что первая гармоника (с $l = 1$) отсутствует в разложении (1.23), поскольку она соответствует смещению везикулы как целого и поэтому не изменяет энергии и площади везикулы. Из (1.23) следует, что минимум энергии достигается, если возбуждена только вторая гармоника. При этом значение поверхностного натяжения равно $\bar{\sigma} = -6\kappa/R^2$.

Разложение (1.23) вырождено по m . Следовательно, для того, чтобы определить равновесную форму везикулы, т.е. $u_{2,m}$, нужно принять во внимание следующие члены разложения эффективной свободной энергии (1.22), которые снимают вырождение. В главном приближении в разложении достаточно удержать кубические слагаемые.

Для дальнейшего анализа удобно выбрать следующий базис действительных функций:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{\pi}}(1 - 3\cos^2\vartheta), & \psi_2 &= \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{\pi}}\sin(2\vartheta)\cos\phi, \\ \psi_3 &= \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{\pi}}\sin(2\vartheta)\sin\phi, & \psi_4 &= \frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{\pi}}\sin^2\vartheta\cos(2\phi), \\ \psi_5 &= \frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{\pi}}\sin^2\vartheta\sin(2\phi),\end{aligned}\tag{1.24}$$

вместо традиционно используемых сферических гармоник $\mathcal{Y}_{2,m}$. Функции ψ_μ удовлетворяют нормировке

$$\int d\phi d\vartheta \sin\vartheta \psi_\mu \psi_\nu = \delta_{\mu\nu}.\tag{1.25}$$

Вклад сферической гармоники второго порядка в u записывается в виде

$$u(\vartheta, \phi) = \sum_{\nu=1}^5 u_\nu \psi_\nu(\vartheta, \phi),\tag{1.26}$$

где u_ν действительны.

Раскладывая изгибную энергию (1.2) и избыточную площадь Δ вплоть до

третьего порядка по u , получаем в терминах коэффициентов разложения (1.26)

$$\mathcal{F}^{(3)} = 12\kappa (u_\mu u_\mu - \Xi_{\mu\nu\lambda} u_\mu u_\nu u_\lambda) + \bar{\sigma} R^2 \Delta^{(3)}, \quad (1.27)$$

$$\Delta^{(3)} = 2u_\mu u_\mu - 2\Xi_{\mu\nu\lambda} u_\mu u_\nu u_\lambda / 3, \quad (1.28)$$

где по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Мы ввели безразмерный симметричный тензор Ξ ,

$$\Xi_{\mu\nu\lambda} = \int d\phi d\vartheta \sin \vartheta \psi_\mu \psi_\nu \psi_\lambda, \quad (1.29)$$

все матричные элементы которого порядка единицы.

После вычисления минимума свободной энергии (1.27) по u_μ при условии сохранения ограничения $\Delta = \Delta^{(3)}$, найдём выражение для множителя Лагранжа $\bar{\sigma}$:

$$1 + \frac{\bar{\sigma} R^2}{6\kappa} = \frac{\sqrt{15}}{14\sqrt{\pi}} \sqrt{\Delta}. \quad (1.30)$$

Формула (1.30) даёт поправку к поверхностному натяжению в стационарном состоянии везикулы, связанную с кубичным членом разложения в свободной энергии. Минимум энергии соответствует вытянутой аксиально симметричной форме, имеющей центр инверсии. Если главная ось везикулы в состоянии равновесия направлена вдоль оси OZ её форма определяется соотношением $u_1 = -\sqrt{\Delta/2}$, т.е.

$$u = \frac{\sqrt{5\Delta}}{4\sqrt{2\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1). \quad (1.31)$$

При наивной оценке коэффициент при $u_\mu u_\mu$ в эффективной свободной энергии (1.27) имеет порядок κ . Подставив же выражение (1.30) в (1.27) находим, что этот коэффициент на самом деле оценивается как $\kappa\sqrt{\Delta}$, т.е. содержит дополнительный малый множитель $\sqrt{\Delta}$. В итоге получается, что квадратичный и кубичный члены разложения в свободной энергии (1.27) имеют один и тот же порядок по Δ . Этот факт даёт формальное основание для процедуры, проведённой в этом Пункте.

1.2.3. Слабые внешние течения, феноменология

Здесь мы рассматриваем слабые внешние течения, которые не могут заметно деформировать везикулу из равновесного состояния. Равновесная форма везикулы аксиально симметрична и имеет центр инверсии [5]. В предыдущем Пункте 1.2.2 мы явно нашли равновесную форму везикулы в пределе малой избыточной площади Δ . Ориентация такой формы задаётся единичным вектором \mathbf{n} , направленным вдоль главной оси везикулы. Вектора \mathbf{n} и $-\mathbf{n}$ описывают одно и то же физическое состояние вследствие инвариантности везикулы по отношению к инверсии.

Поскольку уравнения Стокса линейны, уравнение движения везикулы во внешнем слабом потоке скорости в терминах вектора \mathbf{n} записывается в виде $\partial_t n_i = D_{ijk} \partial_k V_j$, где $\partial_k V_j$ есть градиент скорости внешнего течения, а D_{ijk} — некоторый тензор третьего ранга, зависящий от вектора \mathbf{n} . Вследствие симметрии $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$ тензор D_{ijk} содержит только нечётные степени \mathbf{n} . При движении везикулы должно оставаться верным равенство $\mathbf{n}^2 = 1$, т.е. $n_i D_{ijk} = 0$, поэтому мы приходим к следующему общему виду уравнения движения везикулы:

$$\partial_t n_i = [(n_k \delta_{ij} - n_j \delta_{ik})/2 + D (n_k \delta_{ij}/2 + n_j \delta_{ik}/2 - n_i n_j n_k)] \partial_k V_j, \quad (1.32)$$

которое содержит один безразмерный параметр D . При определении вида уравнения движения (1.32) мы также воспользовались тем, что угловая скорость вращения везикулы должна совпадать с вектором $\boldsymbol{\omega}$, если внешнее течение $\partial_j V_i = -\epsilon_{ijk} \omega_k$ представляет из себя твердотельное вращение. Коэффициент D в (1.32) зависит от относительной силы поверхностной вязкости мембраны, вязкости внутренней жидкости везикулы, а также от параметра избыточной площади Δ . Явное выражение для параметра D будет получено из первых принципов в Пункте 1.6 в пределе квази-сферических везикул.

В случае, если внешнее течение является сдвиговым, удобно использовать сле-

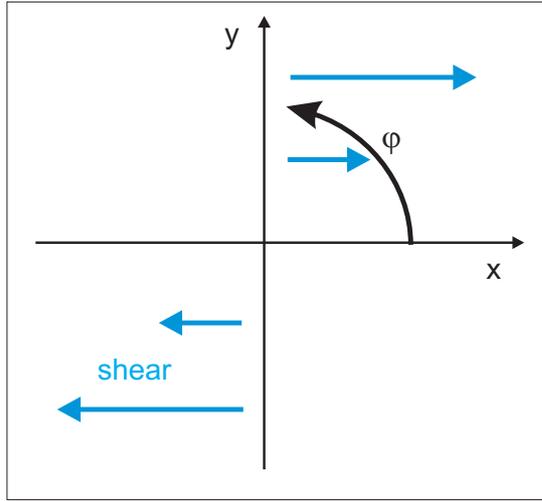


Рис. 1.1. Система отсчёта, связанная со сдвиговым потоком.

дующую параметризацию вектора \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} = (\cos \vartheta_v \cos \phi_v, \cos \vartheta_v \sin \phi_v, \sin \vartheta_v) . \quad (1.33)$$

Компоненты в (1.33) написаны в декартовой системе координат, связанной с течением: ось OX направлена вдоль скорости, а ось OZ в обратную сторону угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ (см. Рис. 1.1). Подставляя в ур. (1.32) выражение (1.33) и значение градиента скорости внешнего сдвигового течения, у которого единственным ненулевым элементом в этом случае является $\partial_y V_x = \dot{\gamma}$, получаем

$$\dot{\gamma}^{-1} \partial_t \phi_v = (D/2) \cos(2\phi_v) - 1/2 , \quad (1.34)$$

$$\dot{\gamma}^{-1} \partial_t \vartheta_v = -(D/4) \sin(2\vartheta_v) \sin(2\phi_v) . \quad (1.35)$$

Заметим, что уравнение на угол ϕ_v не зависит от ϑ_v . Уравнения (1.34,1.35) совпадают с уравнениями, описывающими динамику полимера, и исследовавшимися в работе [60].

Решения уравнений (1.34,1.35) соответствуют либо режиму параллельного переноса, либо режиму кувыркания. Режим параллельного переноса осуществляется, когда $D > 1$. Угол наклона между вектором \mathbf{n} и направлением скорости равен

$$\phi_* = (1/2) \arccos(1/D) . \quad (1.36)$$

В противном случае, когда $D < 1$, везикула находится в режиме кувыркания. Вектор \mathbf{n} при этом испытывает периодическое движение, в среднем сводящееся к вращению в плоскости сдвигового течения. Значение $D = 1$ соответствует переходу из режима параллельного переноса в режим кувыркания. Как следует из (1.34), этот переход осуществляется через развал седловой точки.

1.3. Общий вид уравнения движения

В этом пункте мы выводим динамическое уравнение безразмерной функции смещения u . Процесс вывода состоит из двух этапов. Сначала мы находим скорость на поверхности мембраны для заданной функции $u(\vartheta, \phi)$. Затем мы используем кинематическое соотношение (1.20), что даёт возможность написать замкнутое уравнение на функцию u .

При малых числах Рейнольдса поле скорости жидкости полностью определяется граничными условиями на поверхности мембраны и бесконечности. Таким образом, можно исключить движение жидкости и выписать уравнение на движение поверхности везикулы. Это уравнение является интегральным [61].

Дальнейшее развитие теории возможно в пределе, когда форма везикулы слабо отличается от сферической, т.е. когда параметр $\Delta \ll 1$. При этом оказывается возможным написать уравнения движения поверхности везикулы, которые поддаются полному исследованию, удерживая в уравнении движения главные вклады от этого малого параметра. Особенностью такого разложения по малому параметру Δ является то обстоятельство, что не существует регулярного предела $\Delta \rightarrow 0$. Как следствие, разложение некоторых величин по параметру Δ начинается с нулевой и даже с отрицательной степени. Физическая причина этого факта состоит в том, что абсолютно сферическая везикула не может сохранить свой объём и площадь, когда наложено внешнее течение. Для того, чтобы описать поведение везикулы в этом случае, надо учесть конечную сжимаемость мембраны везикулы.

Впервые разложение по малому параметру Δ было предложено в работе [29] для частного случая равных вязкостей внутренней и внешней жидкости и нулевой поверхностной вязкости. В дальнейшем схема была обобщена на случай $\eta \neq \tilde{\eta}$ в работах [14, 28].

Мы вынесли в Приложение А вывод основного уравнения на движение формы везикулы, поскольку при его выводе нами использовался достаточно громоздкий математический аппарат. Результат вычислений может быть представлен в следующей компактной форме:

$$\hat{a}(\partial_t - \omega \partial_\phi)u = 10s_{ij}n^i n^j - \frac{1}{\eta R^3} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u}, \quad (1.37)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, а безразмерный оператор \hat{a} диагонален в базисе сферических гармоник (1.21). Матричные элементы оператора \hat{a} выписаны в (A.46).

Напомним, что величина $\bar{\sigma}$, входящая в динамическое уравнение (1.37) через (1.22) является поверхностным натяжением σ , усреднённым по углам. Как и прежде, $\bar{\sigma}$ является промежуточной величиной, обеспечивающей сохранение полной площади везикулы. Подчеркнём, что $\bar{\sigma}$ зависит от времени, подстраиваясь под текущую форму везикулы. Заметим также, что растягивающая и вращательная часть внешнего течения разделены в (1.37). Угловая скорость ω “удлиняет” временную производную (её воздействие эквивалентно переходу во вращающуюся систему координат), тогда как матрица растяжения входит в ур. (1.37) через слагаемое $s_{ij}n^i n^j$, играя роль, похожую на роль вариации свободной энергии. Причина разделения растягивающей и вращательной частей градиента внешнего течения состоит в том, что растягивающее течение приводит к вязкой диссипации, тогда как вращательное течение происходит без сопротивления вязких сил.

1.3.1. Сферическая гармоника второго порядка

Проведём дальнейшее упрощение уравнения (1.37). Для этого, во-первых, в эффективной свободной энергии (1.22) нужно оставить только квадратичные и кубичные члены по u . Высшими членами разложения можно пренебречь вследствие малости u . Причина, по которой мы оставляем члены третьего порядка на фоне квадратичных членов будет объяснена ниже. Далее, член $s_{ij}n^i n^j$ содержит только сферическую гармонику второго порядка, поэтому он не выводит u из подпространства $l = 2$. Высшие гармоники в u с $l > 2$ возбуждаются поправками высшего порядка по u к эффективной свободной энергии и к члену $s_{ij}n^i n^j$. Эти поправки малы по сравнению с членами, соответствующими сферической гармонике второго порядка. Амплитуда высших гармоник в u с $l > 2$ может быть оценена как Δ , что много меньше по сравнению с оценкой $\sqrt{\Delta}$ для амплитуды второй гармоники. Сила воздействия высших гармоник на вторую также пренебрежимо мала, поскольку она может быть оценена как $\Delta^{3/2}$, что гораздо меньше, чем те члены, которые мы оставили в ур. (1.37). Таким образом, можно использовать редуцированное уравнение, в котором u содержит только гармонику второго порядка. В этом случае оператор \hat{a} сводится к константе

$$a = \frac{16}{3} \left(1 + \frac{23\tilde{\eta}}{32\eta} + \frac{\zeta}{2\eta R} \right), \quad (1.38)$$

зависящей от всех родов вязкости. Можно назвать константу a обобщённым контрастом вязкости. Отметим здесь, что предел $a \rightarrow \infty$, соответствующий тому, что либо вязкость мембраны, либо вязкость внутренней жидкости устремляется к бесконечности, должен соответствовать поведению везикулы как твёрдого тела.

Подставим выражение (1.27) у уравнение (1.37), а затем спроектируем получившееся уравнение на подпространство $l = 2$. Таким образом уравнение (1.37)

сводится к

$$\begin{aligned} a[\partial_t u_\mu - \omega(\partial_\phi u)_\mu] &= \\ &= 10(s_{ij}n_i n_j)_\mu - \frac{24}{\eta R} \left[\left(\frac{\kappa}{R^2} + \frac{\bar{\sigma}}{6} \right) u_\mu - \left(\frac{3\kappa}{2R^2} + \frac{\bar{\sigma}}{12} \right) \Xi_{\mu\nu\lambda} u_\nu u_\lambda \right], \end{aligned} \quad (1.39)$$

где нижние индексы в $(\partial_\phi u)_\mu$ и $(s_{ij}n_i n_j)_\mu$ означают взятие проекции на базисную функцию (1.24), посчитанную согласно (1.25).

Множитель $\bar{\sigma}$ в уравнении (1.39) должен быть вычислен из условия $2u_\mu u_\mu = \Delta$, которое является главным приближением по u закона сохранения площади. Подставляя таким образом найденное значение $\bar{\sigma}$, получаем

$$a[\partial_t u_\mu - \omega(\partial_\phi u)_\mu] = \left(\delta_{\mu\rho} - \frac{2u_\mu u_\rho}{\Delta} \right) \left[10(s_{ij}n_i n_j)_\rho + \frac{24\kappa}{\eta R^3} \Xi_{\rho\nu\lambda} u_\nu u_\lambda \right]. \quad (1.40)$$

В соответствии с уравнением (1.16), правая часть уравнения (1.40) является суммой двух вкладов, пропорциональных силе растяжения внешнего потока s_{ij} и модулю изгиба κ . Вклад, пропорциональный ω , включён в левую часть (1.40). Заметим, что член, пропорциональный κ имеет второй порядок по u , тогда как вклад первого порядка по u исчез. Это формально подтверждает корректность сохранения члена третьего порядка в разложении свободной энергии.

При выводе уравнения (1.40) мы пренебрегли слагаемыми порядка su , которые возникают как поправки к члену $s_{ij}n_i n_j$. Они остаются много меньше по сравнению со слагаемым, пропорциональным κ , при условии $s \ll \kappa\sqrt{\Delta}/(\eta R^3)$. Это является формальным критерием применимости уравнения (1.40). Ниже мы однако покажем, что это уравнение может быть применено и в более сильных течениях с $s \gtrsim \kappa\sqrt{\Delta}/(\eta R^3)$.

1.3.2. Перемасштабированное уравнение

После некоторого перемасштабирования уравнение (1.40) может быть переписано в виде

$$\left(\tau \partial_t - \frac{S\Lambda}{2} \partial_\phi \right) U_\mu = (\delta_{\mu\rho} - U_\mu U_\rho) (S_\rho + \tilde{\Xi}_{\rho\nu\lambda} U_\nu U_\lambda), \quad (1.41)$$

где $\tilde{\Xi} = (7\sqrt{\pi}/\sqrt{5})\Xi$ и

$$U_\mu = \sqrt{2}u_\mu/\sqrt{\Delta}, \quad U_1^2 + \dots + U_5^2 = 1. \quad (1.42)$$

Параметры в уравнении (1.41) определены следующим образом:

$$\tau = \frac{7\sqrt{\pi}}{12\sqrt{10}} \frac{a\eta R^3}{\kappa\sqrt{\Delta}}, \quad S = \frac{14\pi}{3\sqrt{3}} \frac{s\eta R^3}{\kappa\Delta}, \quad \Lambda = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{10\pi}} \frac{\sqrt{\Delta}a\omega}{s}, \quad (1.43)$$

где, как и раньше, $s^2 = s_{ij}s_{ij}/2$. Абсолютная величина “вектора” S_μ в (1.41) равна параметру S , введённому в (1.43). “Направление” “вектора” S_μ определяется проекциями функции углов $s_{ij}n^i n^j$ на базис (1.24), т.е. структурой матрицы растяжения s_{ij} . Таким образом, динамика везикулы определяется двумя параметрами S и Λ вместе с “направлением” “вектора” S_μ .

Время τ является характерным временем релаксации везикулы к состоянию равновесия. По сравнению с комбинацией $\eta R^3/\kappa$, связанной с внешней жидкостью, время τ содержит дополнительный множитель a , отражающий вклады вязкости внутренней жидкости и вязкости мембраны в процесс релаксации, а также множитель $\Delta^{-1/2}$. Этот дополнительный множитель отражает относительную медленность релаксации второй гармоники, связанную с вырождением квадратичного по u вклада в эффективную свободную энергию (1.22). Вследствие этого вырождения релаксация второй гармоники определяется кубичным вкладом в свободную энергию, который как раз и содержит дополнительную по сравнению с энергиями гармоник высшего порядка с $l > 2$ малость $\Delta^{1/2}$. Таким образом, условие адиабатичности, позволяющее использовать стационарное уравнение Стокса, должно быть записано как $\tau \gg \rho R^2/\eta$, что равносильно $a\eta^2 R \gg \rho\kappa\sqrt{\Delta}$. Это неравенство верно поскольку радиус везикулы R велик по сравнению с молекулярной длиной, а Δ мало.

Параметр S определяет относительную силу потока. Выражение (1.43) для S можно интерпретировать следующим образом. Внешняя вязкая сила ηs должна компенсироваться поверхностным натяжением $\bar{\sigma}$, помноженным на вариацию

кривизны мембраны, которую можно оценить как $\sqrt{\Delta}/R$. Таким образом, $\bar{\sigma} \sim \eta s R / \sqrt{\Delta}$. Это значение поверхностного натяжения нужно сравнить с поправкой $\delta\sigma$ к поверхностному натяжению в состоянии равновесия, которая связана с кубическими членами разложения в эффективной свободной энергии (1.22), и для которой справедлива оценка $\kappa\sqrt{\Delta}/R^2$, см. (1.30). Величина S есть отношение этих двух вкладов в поверхностное натяжение, $S \sim \bar{\sigma}/\delta\sigma$. Добавим здесь также, что ранее полученное условие $s \ll \kappa\sqrt{\Delta}/(\eta R^3)$, означающее малость поправок порядка su (1.40,1.41) по сравнению с κ -членом, в терминах параметра S переписывается в виде $S \ll 1/\sqrt{\Delta}$.

Параметр Λ определяет относительную силу антисимметричной части градиента скорости внешнего течения. Заметим, что $\omega\tau \sim S\Lambda$. Условие $\Lambda \sim 1$ определяет величину угловой скорости, при которой эффект от ω становится сравним с эффектом от силы растяжения внешнего потока \hat{s} . Это условие может быть переписано как $\omega \sim s/(a\sqrt{\Delta})$, что согласуется с непосредственным анализом ур. (1.40). Это характерное значение угловой скорости ω не совпадает с характерным значением s , что подчёркивает отличие ролей симметричной и антисимметричной частей градиента скорости внешнего течения в динамике везикулы.

Для дальнейшего анализа нам будет удобно использовать следующую параметризацию переменных U_μ (1.42) через “углы” Φ, Θ, Ψ, J :

$$\begin{aligned} U_1 &= \sin \Theta \cos J, & U_4 &= \cos \Theta \cos(2\Phi), & U_5 &= \cos \Theta \sin(2\Phi), & (1.44) \\ U_2 &= \sin \Theta \sin J \cos \Psi, & U_3 &= \sin \Theta \sin J \sin \Psi, \end{aligned}$$

где Θ изменяется в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$, J изменяется от 0 до $\pi/2$, а области значений Φ и Ψ неограничены. Представление (1.44) автоматически удовлетворяет условию нормировки (1.42) и содержит четыре независимых параметра вместо пяти зависимых U_μ . Безразмерное смещение u , определённое в (1.17), выглядит

следующим образом:

$$u = \frac{\sqrt{5}\Delta}{4\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin \Theta \cos J}{\sqrt{3}} (1 - 3 \cos^2 \vartheta) + \right. \\ \left. + \cos \Theta \sin^2 \vartheta \cos(2\phi - 2\Phi) + 2 \sin \Theta \sin J \sin(2\vartheta) \cos(\phi - \Psi) \right]. \quad (1.45)$$

Равновесная форма везикулы с направлением главной оси, определяемым вектором \mathbf{n} (1.33), задаётся следующими значениями параметров Φ, Θ, Ψ, J :

$$\sin \Theta = -\sqrt{1 - (3/4) \cos^4 \vartheta_v}, \quad \Phi = \Psi = -\phi_v, \quad \tan J = \frac{2\sqrt{3} \sin(2\vartheta_v)}{1 - 3 \cos(2\vartheta_v)}. \quad (1.46)$$

1.4. Плоское внешнее течение

Мы приступаем к исследованию плоского внешнего течения, для которого вектор скорости \mathbf{V} лежит в плоскости и не зависит от координаты, нормальной к этой плоскости. Частным случаем плоского течения является сдвиговое течение, в котором растягивающая s и вращающая ω части равны. В общем случае соотношение между s и ω может быть произвольным, таким образом предельными случаями в нашем рассмотрении могут быть как чисто вращающие, так и чисто растягивающие потоки. В этом Пункте мы получаем общее уравнение, описывающее динамику везикулы во внешнем плоском течении и производим предварительный анализ типов решения этого уравнения.

1.4.1. Общее рассмотрение

Мы выбираем оси OX и OY нашей системы координат лежащими в плоскости потока (без ограничения общности) так, что диагональные элементы матрицы $\partial_j V_i$ равны нулю. Две недиагональных компоненты матрицы $\partial_j V_i$ полностью определяют плоское течение и через силы растяжения s и вращения ω выражаются как $\partial_y V_x = s + \omega$ и $\partial_x V_y = s - \omega$. В частности, для сдвигового течения, скорость

которого направлена вдоль оси OX , единственной ненулевой компонентой матрицы $\partial_j V_i$ является $\partial_y V_x = \dot{\gamma}$, где $\omega = s = \dot{\gamma}/2$. Можно убедиться в том, что в выбранной системе координат единственной ненулевой компонентой “вектора” S_μ в (1.41) является $S_5 = S$. Таким образом, два параметра S и Λ , полностью определяют тип движения везикулы.

Мы работаем в терминах введённых в (1.44) “углов” Φ, Θ, Ψ, J . Для плоского внешнего течения уравнение (1.41) может быть переписано в виде

$$\tau \partial_t \begin{pmatrix} \Theta \\ \Phi \\ J \\ \Psi \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} g_\Theta \\ g_\Phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{S\Lambda}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_\Theta \\ f_\Phi \\ f_J \\ f_\Psi \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

где

$$g_\Theta = -\sin(\Theta) \sin(2\Phi), \quad g_\Phi = (1/2) \cos(2\Phi) \sec \Theta, \quad (1.48)$$

$$f_\Theta = \frac{1}{32} \{ -4 \cos J \cos \Theta \sin^2 J + [33 \cos J - \cos(3J)] \cos(3\theta) - 4\sqrt{3} \cos[2(\Phi - \Psi)] [\sin \Theta - 3 \sin(3\Theta)] \sin^2 J \},$$

$$f_\Phi = -\frac{1}{4} \sqrt{3} \sin^2 J \sin \Theta \sin[2(\Phi - \Psi)] \tan \Theta,$$

$$f_J = \frac{1}{8} \{ -8 \csc \Theta \sin J + [11 \sin J - \sin(3J)] \sin \Theta + 4\sqrt{3} \cos \Theta \cos[2(\Phi - \Psi)] \sin(2J) \},$$

$$f_\Psi = \sqrt{3} \cos \Theta \sin[2(\Phi - \Psi)]. \quad (1.49)$$

Здесь снова обратим внимание на соответствие теперь уже ур. (1.47) разложению (1.16): в правой части (1.47) первый член пропорционален растягивающей части внешнего течения, второй член пропорционален вращающей части внешнего течения, а последний член связан с изгибными силами мембраны.

1.4.2. Симметричное решение

Из (1.47) следует, что существует решение с $J = 0$. Существование такого решения является следствием заданной геометрии: внешнее течение инвариантно по отношению к отражению относительно плоскости потока. Вследствие этой симметрии существует симметричное по ϑ решение для смещения u , соответствующее $J = 0$.

Если $J = 0$, то смещение u пропорционально выражению

$$u \propto \cos \Theta \sin^2 \vartheta \cos(2\phi - 2\Phi) + \sin \Theta \frac{1 - 3 \cos^2 \vartheta}{\sqrt{3}}, \quad (1.50)$$

которое следует из (1.45). Таким образом, “угол” Φ определяет ориентацию везикулы в плоскости OXY , тогда как “угол” Θ определяет форму везикулы. Система уравнений (1.47) при $J = 0$ сводится к следующей системе двух уравнений:

$$\tau \partial_t \Theta = -S \sin \Theta \sin(2\Phi) + \cos(3\Theta), \quad (1.51)$$

$$\tau \partial_t \Phi = \frac{S}{2} \left[\frac{\cos(2\Phi)}{\cos \Theta} - \Lambda \right]. \quad (1.52)$$

Отметим, что последнее, нелинейное по u слагаемое, в (1.40) производит только один член $\cos(3\Theta)$ в (1.51).

Режим параллельного переноса соответствует области параметров S и Λ , в которой система уравнений (1.51,1.52) имеет стабильные стационарные точки. Стационарные точки находятся приравниванием нулю правых частей уравнений (1.51,1.52), что даёт простые алгебраические уравнения. Эти решения оказываются устойчивыми в области $\Lambda \lesssim 1$, точные границы которой найдены ниже.

Для бóльших Λ аттракторами системы (1.51,1.52) являются предельные циклы. Они соответствуют либо режиму кувыркания, либо режиму покачивания. В режиме кувыркания абсолютное значение угла Φ неограниченно растёт, тогда как в режиме покачивания угол Φ колеблется в ограниченной области. Для пояснения этого утверждения удобно изображать эволюцию везикулы на географиче-

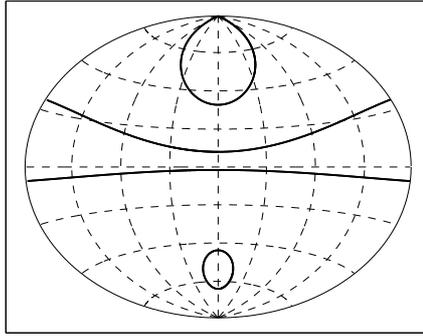


Рис. 1.2. Динамика везикулы на $\Theta - \Phi$ атласе.

ском атласе, у которого Θ и Φ являются широтой и долготой соответственно, см. Рис. 1.2. Режим параллельного переноса соответствует одной точке на атласе. Режим покачивания соответствует замкнутой кривой, которая не содержит в себе полюса, тогда как режим кувыркания, наоборот, изображается кривой, содержащей внутри себя полюс. На Рис. 1.2 кривые режима кувыркания оканчиваются на границе атласа, имея на концах одинаковое значение параметра Θ , поскольку точки на краях атласа с одним и тем же значением широты являются физически эквивалентными.

Подчеркнём, что переход из покачивания в кувыркание не сопровождается какими-либо сингулярностями (тогда как переход из режима параллельного переноса в покачивание или кувыркание происходит через бифуркации, см. следующий Пункт). Это утверждение становится очевидным, если рассмотреть постепенную трансформацию цикла из цикла покачивания в цикл кувыркания. Действительно, это преобразование остаётся гладким в том числе и в точке, где цикл пересекает полюс.

1.4.3. Прецессирование

Исследование полной системы уравнений (1.47) показывает, что при некоторых значениях параметров S и Λ должен наблюдаться ещё один режим движения.

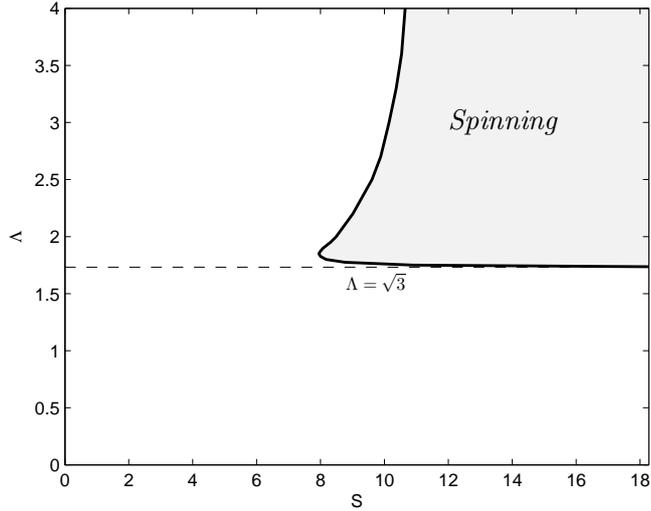


Рис. 1.3. Область существования режима прецессирования.

Его область существования изображена на 1.3. Форма везикулы в этом режиме не симметрична относительно отражения $z \rightarrow -z$ (или $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$). В настоящий момент нет систематического экспериментального исследования, подтверждающего или опровергающего существование этого режима. Мы назвали этот режим режимом прецессирования, поскольку в области $\Lambda \gg S$ форма везикулы близка к равновесной, а динамика везикулы сводится к прецессированию вокруг оси OZ , образуя при этом постоянный угол между осью OZ и главной осью везикулы. В отличие от режима кувыркания этот угол не равен $\pi/2$. В противоположном пределе $\Lambda \ll S$ движение везикулы в режиме прецессирования оказывается несколько сложнее. Главная ось везикулы по прежнему не ортогональна к оси OZ , но прецессирование сопровождается периодическим изменением формы везикулы. По другому это движение можно описать как прецессирование вокруг оси OZ антисимметричной по отношению к отражению $z \rightarrow -z$ части функции смещения u на фоне стационарной симметричного симметричного по отношению к отражению $z \rightarrow -z$ эллипсоида с главной осью, направленной вдоль OX .

Из Рис. 1.3 следует, что прецессирование должно наблюдаться при относительно больших значениях параметров S и Λ . Форма везикулы в режиме прецес-

сирования может быть найдена аналитически в предельных случаях больших Λ или больших S . Соответствующий анализ проведён в следующих Пунктах.

Заметим, что режим прецессирования сосуществует с режимом кувыркания: эти два режима являются аттракторами для двух различных областей динамической системы (1.47). В реальной системе с ненулевым значением теплового шума должно наблюдаться бистабильное поведение везикулы, в котором колебания в режиме кувыркания прерываются колебаниями в режиме прецессирования. Проведённое нами численное моделирование показало, что прецессирование и кувыркание имеют в фазовом пространстве сравнимые по объёму области притяжения для всех S, Λ , поэтому в реальных экспериментах оба эти режима должны наблюдаться со сравнимыми вероятностями. Вблизи границы существования, см. Рис. 1.3, режим прецессирования теряет свою устойчивость через распад седловой точки, переходя в режим кувыркания.

1.5. Фазовая диаграмма

Оказывается удобным построить “фазовую диаграмму” исследуемой системы на плоскости параметров $S - \Lambda$, на которой изображены возможные режимы динамики везикулы. Структура диаграммы определяется линиями переходов между разными режимами. Динамика везикулы замедляется вблизи переходов из режима параллельного переноса в режим кувыркания или в режим покачивания. Поэтому окрестности этих линий перехода нуждаются в отдельном исследовании. Как было показано выше, переход из режима покачивания в режим кувыркания не сопровождается сингулярностью в поведении везикулы. Отметим также, что на диаграмме есть специальная точка, в которой соединяются линии переходов из режима параллельного переноса в режим кувыркания и из режима параллельного переноса в режим покачивания. Вблизи этой точки происходит дополнительное замедление динамики везикулы.

1.5.1. Переход из режима параллельного переноса в режим покачивания

Как мы уже отмечали, стационарные точки уравнений (1.51,1.52) соответствуют параллельному переносу. Для того, чтобы исследовать устойчивость этих решений, нужно линеаризовать уравнения (1.51,1.52) вблизи исследуемой стационарной точки:

$$\tau \partial_t \begin{pmatrix} \delta\Theta \\ \delta\Phi \end{pmatrix} = \hat{B} \begin{pmatrix} \delta\Theta \\ \delta\Phi \end{pmatrix}. \quad (1.53)$$

Стационарная точка устойчива, если оба собственных значения матрицы \hat{B} имеют отрицательные действительные части. Эти условия эквивалентны условиям $\text{tr } \hat{B} < 0$ и $\det \hat{B} > 0$.

Переход из режима параллельного переноса в режим покачивания определяется условием $\text{tr } \hat{B} = 0$. Используя уравнения (1.51,1.52), приходим к тому, что условие $\text{tr } \hat{B} = 0$ определяет кривую $\Lambda = \Lambda_*(S)$, где

$$\Lambda_* = \sqrt{2} \sqrt{1 - 1/S^2}. \quad (1.54)$$

В (1.54) S изменяется от $\sqrt{3}$ до ∞ , а Λ_* изменяется, соответственно, от $2/\sqrt{3}$ до $\sqrt{2}$. Линия перехода, определяемая (1.54), изображена на Рис. 1.4 красным цветом. Кривая начинается в специальной точке $S = \sqrt{3}$, $\Lambda = 2/\sqrt{3}$ (точка e_1 на Рис. 1.4) и уходит вправо.

Для достижения ясности, мы изобразили на Рис. 1.4 только два режима, режим параллельного переноса и режим покачивания. Вблизи специальной точки e_1 существует область параметров $S - \Lambda$, в которой сосуществуют две стационарные устойчивые точки у Ур. (1.51,1.52). На Рис. 1.4 мы изобразили только один из возможных режимов параллельного переноса, который получен продолжением из области больших S (режим “правого” параллельного переноса). Красная линия как раз изображает переход из режима “правого” параллельного переноса в

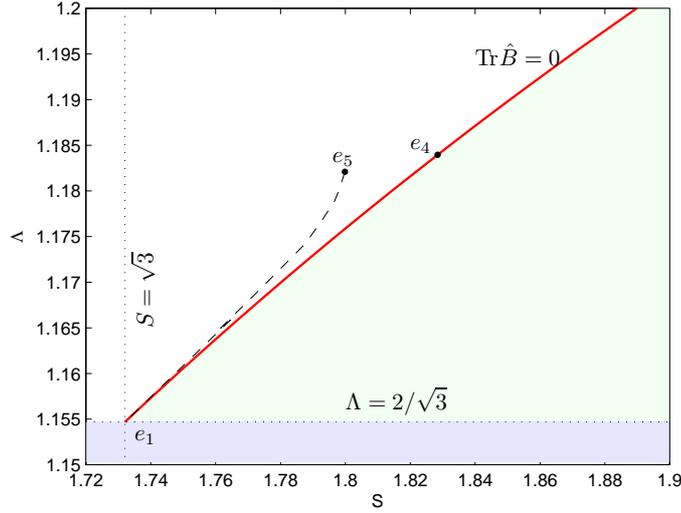


Рис. 1.4. Фазовая диаграмма вблизи специальной точки. Переход из режима параллельного переноса в покачивание.

режим покачивания. Пунктирная линия на Рис. 1.4 (полученная численным способом) изображает границу устойчивости режима покачивания. Эта линия обрывается в точке e_5 . Таким образом, режим покачивания устойчив между красной и пунктирной линиями, а также над точкой e_5 . Слева от пунктирной кривой режим покачивания становится неустойчивым и везикула переходит в режим параллельного переноса, полученного продолжением из области малых S (режим “девого” параллельного переноса).

Разложив уравнения (1.51,1.52) при заданном S вблизи точки (1.54), получим уравнение

$$\tau \partial_t Z = \varepsilon Z - i\sqrt{S^2 - 3} Z - K|Z|^2 Z, \quad (1.55)$$

на комплексную переменную Z . Здесь

$$\varepsilon = \frac{8S\sqrt{S^2 - 1}}{S^2 - 3}(\Lambda - \Lambda_*), \quad K = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{S^2 - 1}(S^2 + 5)}{(S^2 - 3)^{3/2}},$$

а переменная Z связана с отклонениями “углов” от их значений в стационарной

точке S, Λ_* через равенство

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}\delta\Theta \\ \delta\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^{-1} - i\mu & \mu^{-1} + i\mu \\ -\mu^{-1} - i\mu & -\mu^{-1} + i\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ Z^* \end{pmatrix},$$

где

$$\mu = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{S^2 - 1} + \sqrt{2}}{\sqrt{S^2 - 1} - \sqrt{2}}},$$

а Z^* есть комплексно сопряжённое Z .

Уравнение (1.55) даёт бифуркацию Хопфа. Над линией перехода вблизи неё, при $\Lambda > \Lambda_*$, описывается предельным циклом с радиусом, пропорциональным $\sqrt{\Lambda - \Lambda_*}$. Это движение соответствует покачиванию, поскольку радиус цикла мал вблизи линии перехода, и вследствие этого предельный цикл не может захватывать полюс (см. Рис. 1.2).

Параметры в (1.55) имеют “критическую” зависимость вблизи специальной точки $S = \sqrt{3}, \Lambda = 2/\sqrt{3}$. В частности, характеристическая частота бифуркации пропорциональна $\sqrt{S - \sqrt{3}}$. Амплитуды флуктуаций Θ и Φ , однако, оценивается как $\sqrt{\Lambda - \Lambda_*}$, без “критической” зависимости от $S - \sqrt{3}$.

Для того, чтобы исследовать непосредственную окрестность специальной точки e_1 , необходим отдельный анализ, поскольку характеристическая частота бифуркации Хопфа $\tau^{-1}\sqrt{S^2 - 3}$ стремится к нулю при приближении к специальной точке, и поэтому приближённое уравнение (1.55) перестаёт быть верным. Здесь мы, однако, не проводим этот анализ из тех соображений, что эта окрестность достаточно мала, и для реальной системы тепловые флуктуации скорее всего не позволят производить на столько точные измерения.

1.5.2. Переход из режима параллельного переноса в режим кувыркания

Рассмотри теперь часть границы области существования режима параллельного переноса, определяющуюся условием $\det \hat{B} = 0$, где \hat{B} есть матрица, введённая

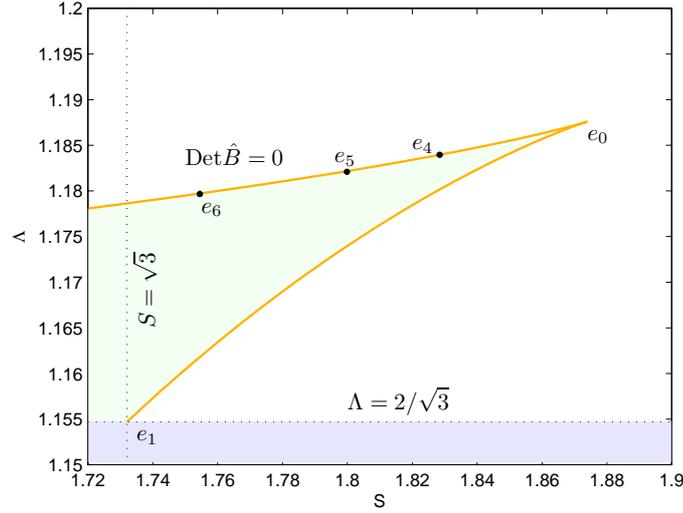


Рис. 1.5. Фазовая диаграмма вблизи специальной точки. Границы устойчивости режима “левого” параллельного переноса.

в уравнении (1.53). Эта линия перехода имеет более сложный вид по сравнению с линией $\text{tr } \hat{B} = 0$. Из уравнений (1.51,1.52) следует, что она может быть задана параметрически

$$S = \frac{\zeta^2 \sqrt{15 - 32\zeta^2 + 16\zeta^4}}{1 - \zeta^2}, \quad \Lambda = \frac{\sqrt{-8\zeta^4 + 12\zeta^2 - 3}}{\zeta^2 \sqrt{5 - 4\zeta^2}}, \quad (1.56)$$

где параметр ζ изменяется от $1/\sqrt{2}$ до $\sqrt{3}/2$. Граничное значение $\zeta = 1/\sqrt{2}$ соответствует специальной точке e_1 , (в которой $S = \sqrt{3}$, $\Lambda = 2/\sqrt{3}$), а граничное значение $\zeta = \sqrt{3}/2$ соответствует точке $S = 0$, $\Lambda = 2/\sqrt{3}$. Вблизи специальной точки e_1 линия (1.56) изображена на Рис. 1.5 оранжевым цветом. Выражения для S и Λ имеют максимум при $\zeta_0 = \sqrt{1 - 2^{-4/3}}$. Значение $\zeta = \zeta_0$ соответствует точке излома e_0 на Рис. 1.5. Вблизи этого максимума зависимость $S \approx 1.8737 - 46.97(\zeta - \zeta_0)^2$.

Оранжевая кривая определяет границу устойчивости режима параллельного переноса, продолженного из области малых S . Различные участки кривой соответствуют разным результатам распада этого режима. Сегменты e_1e_0 и e_0e_4 соответствуют переходу в режим параллельного переноса, полученного путём продолжения из области больших S . Таким образом, существует область сосуществова-

ния двух режимов параллельного переноса. Сегмент e_4e_6 соответствует переходу в режим покачивания. Как мы говорили выше, в точке e_5 оканчивается линия границы устойчивости режима покачивания. Таким образом, существует область $e_5e_4e_1$ сосуществования “левого” режима параллельного переноса и режима покачивания. Остаток кривой левее точки e_6 соответствует переходу в режим кувыркания.

Рассмотрим верхнюю часть оранжевой кривой на Рис. 1.5, которая соответствует интервалу $\zeta_0 < \zeta < \sqrt{3}/2$ в (1.56). Исследуем динамику “углов” Θ и Φ в окрестности этой кривой. В этой области динамика везикулы сводится к динамике одной мягкой степени свободы, если из рассмотрения исключить относительно быструю релаксацию второй, жёсткой, степени свободы. Динамика мягкой степени свободы может быть описана в терминах уравнения на “угол” Φ , а “угол” Θ адиабатически подстраивается под Φ . После вычислений получаем:

$$\tau \partial_t \delta \Phi = S \left[A \delta \Lambda + B \sqrt{S_0 - S} (\delta \Phi)^2 \right], \quad (1.57)$$

где $\delta \Phi$ есть отклонение Φ от его стационарного значения, взятого на линии перехода при заданном S , а $\delta \Lambda = \Lambda - \Lambda(S)$. В (1.57) $\Lambda(S)$ определяется уравнением (1.56), а A, B являются функциями S , изображёнными на Рис. 1.6. Параметры A, B имеют корневую особенность около точки $S = S_0$, где S_0 соответствует точке поворота e_0 на Рис. 1.5.

Нижней части оранжевой кривой, сегменту e_0e_1 на Рис.1.5, соответствует интервал $1/\sqrt{2} < \zeta < \zeta_0$. Уравнение на мягкую степень свободы выглядит следующим образом

$$\tau \partial_t \delta \Phi = (S - \sqrt{3}) \left[-\tilde{A} \delta \Lambda + \tilde{B} \sqrt{S_0 - S} (\delta \Phi)^2 \right], \quad (1.58)$$

и аналогично ур. (1.57). Параметры \tilde{A} и \tilde{B} в (1.58) как функции S построены на Рис. 1.7, где значение $S = \sqrt{3}$ соответствует точке e_1 .

Уравнения (1.57,1.58) описывают развал седловой точки. Для ур. (1.57), при

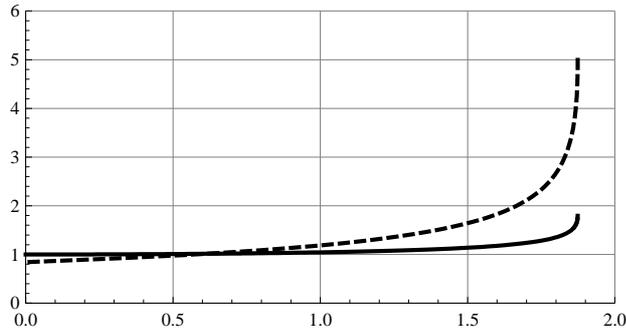


Рис. 1.6. Зависимость от S параметров A (сплошная линия) и B (пунктирная линия).

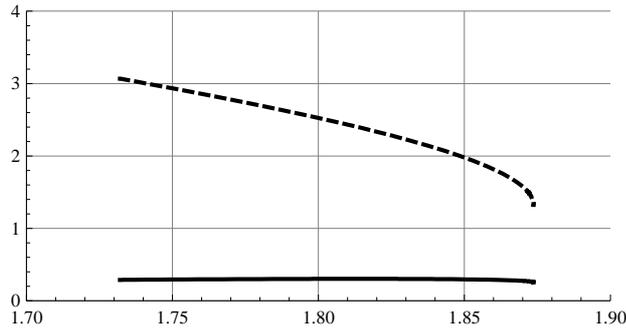


Рис. 1.7. Зависимость от S параметров \tilde{A} (сплошная линия) и \tilde{B} (пунктирная линия).

$\delta\Lambda < 0$ (ниже линии перехода) существует стабильная стационарная точка $\delta\Phi \propto \sqrt{|\delta\Lambda|}$. Она соответствует режиму “левого” параллельного переноса. При $\delta\Lambda > 0$ (над линией перехода) не существует стационарных точек, в рамках уравнения (1.57). Для того, чтобы установить состояние системы в этом случае, необходимо использовать полную систему уравнений (1.51,1.52), не ограничиваясь разложением (1.57). Как показал предшествующий анализ, распад седловой точки при $\delta\Lambda > 0$ может приводить к кувырканию, покачиванию или режиму “правого” параллельного переноса. В ур. (1.58) знак $\delta\Lambda$ должен быть изменён: устойчивая точка существует выше линии перехода при $\delta\Lambda > 0$. Неустойчивость, развивающаяся ниже линии перехода $\delta\Lambda < 0$ приводит везикулу в режим “правого” параллельного переноса.

Как следует из (1.57,1.58), вблизи точки излома e_0 наблюдается дополнительное замедление динамики везикулы. Функции B, \tilde{B} имеют конечный предел при

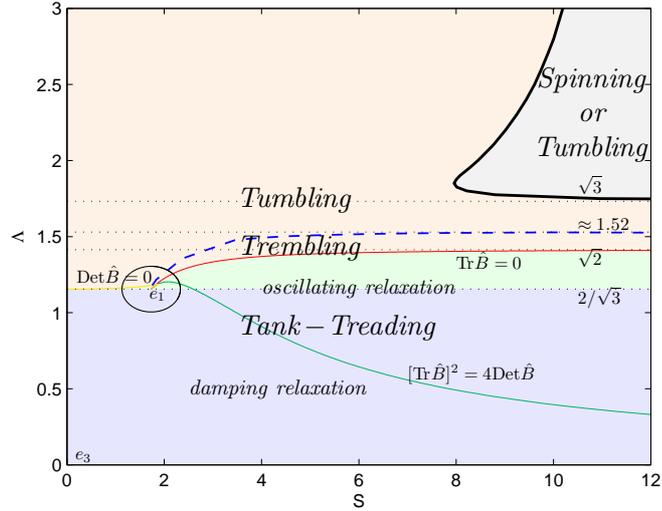


Рис. 1.8. Полная фазовая диаграмма

$S \rightarrow S_0$. Заметим, что в непосредственной близости в точке e_0 динамика везикулы не описывается уравнениями (1.57, 1.58), поскольку множитель перед $(\delta\Phi)^2$ стремится к нулю, вследствие чего возникает необходимость удерживать более высокие члены разложения по $\delta\Phi$. По тем же причинам уравнение (1.58) неприменимо вблизи точки e_1 , поскольку коэффициент в правой части уравнения стремится к нулю при приближении к точке e_1 .

1.5.3. Полная фазовая диаграмма

Полную фазовую диаграмму можно получить, собирая вместе результаты, полученные выше. Она изображена на Рис. 1.8. Красная линия изображает переход из режима параллельного переноса в режим покачивания, а оранжевая кривая (большая её часть за исключением малой окрестности специальной точки) соответствует переходу из режима параллельного переноса в режим кувыркания. Линия перехода из покачивания в кувыркание, полученная численным образом, на Рис. 1.8 изображена пунктиром. В правом верхнем углу обозначена область сосуществования режимов прецессирования и кувыркания. Наконец, на Рис. 1.8 мы также нарисовали зелёную линию раздела между областями режима парал-

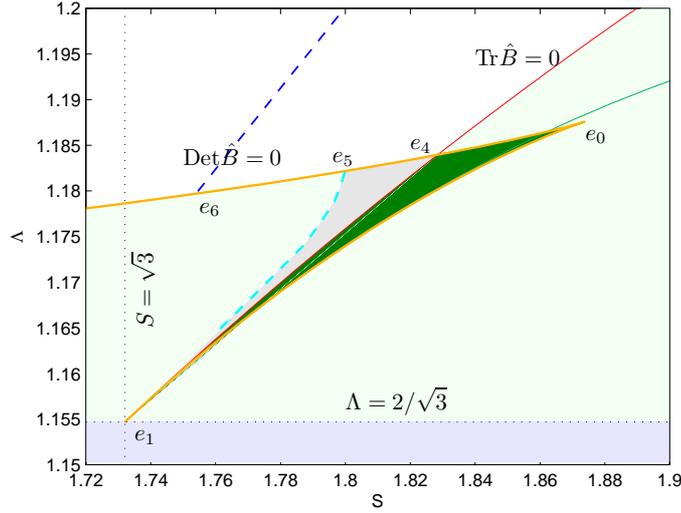


Рис. 1.9. Фазовая диаграмма вблизи специальной точки.

лельного переноса, в которых у собственных значений матрицы \hat{B} преобладает действительная (простая релаксация) или мнимая (осциллирующая релаксация) части.

Область режима параллельного переноса состоит из светло-фиолетовой части, находящейся ниже линии $\Lambda = 2/\sqrt{3}$ (в которой Φ положителен), и светло-зелёной части находящейся над линией $\Lambda = 2/\sqrt{3}$ (в которой Φ отрицательно для $S > \sqrt{3}$). Отметим, что есть ещё одно стационарное решение системы (1.51,1.52) существующее в области $\Lambda > \sqrt{2}\sqrt{1 - 1/S^2}$. Тем не менее, это решение неустойчиво по отношению к возбуждениям переменной J , т.е. являются неустойчивыми для полной системы (1.47).

Фазовая диаграмма имеет сложную структуру вблизи специальной точки $S = \sqrt{3}$, $\Lambda = 2/\sqrt{3}$. Окрестность этой точки изображена на Рис. 1.9. Область сосуществования двух стабильных стационарных точек, или двух режимов параллельного переноса, обозначена тёмно-зелёным треугольником. Область сосуществования стабильной точки вместе с предельным циклом, или режима параллельного переноса и режима покачивания, обозначена серо-фиолетовым треугольником. Рисунок 1.9 является комбинацией Рисунков 1.4 и 1.5.

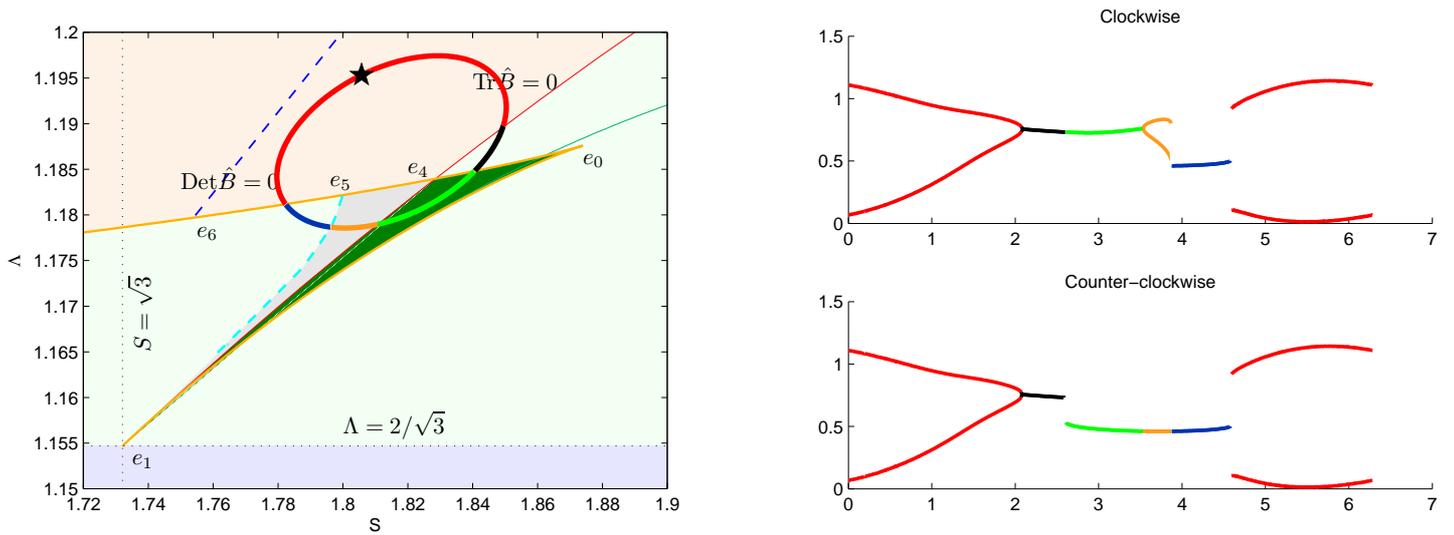


Рис. 1.10. Значения параметра Θ в различных динамических режимах.

Различные режимы динамики везикулы изображены на Рис. 1.10. Мы предполагаем, что параметры S - Λ системы медленно изменяются при следовании по эллиптической кривой, изображённой на фазовой диаграмме слева. Будем следить за динамикой и, в частности, за изменением “угла” Θ в процессе обозначенного движения по плоскости S - Λ . Красная часть $S\Lambda$ -кривой соответствует режиму покачивания, в котором параметр Θ осциллирует в пределах, показанных на правом графике. На чёрном и синем участках везикула находится в режимах параллельного переноса (в “правом” или в “левом”), полученных продолжением из области больших и малых S соответственно. В этих режимах Θ остаётся постоянным. Эти режимы сосуществуют на зелёном участке $S\Lambda$ -кривой, на нём везикула выбирает один из них в зависимости от начальных условий. На линии e_1 - e_4 режим “правого” параллельного переноса переходит в режим покачивания. Режимы покачивания и параллельного переноса сосуществуют на оранжевой части $S\Lambda$ -кривой. Заметим, что у системы есть гистерезис: выбор между сосуществующими режимами зависит от направления обхода по $S\Lambda$ -кривой. Заметим также, что при обходе встречаются два типа бифуркации: при пересечении линии e_1 - e_4 происходит бифуркация Хопфа, а при пересечении линии e_6 - e_5 – развал седловой точки.

1.6. Предельные случаи

Мы установили общие особенности динамики везикулы в достаточно обширном множестве внешних плоских течений. Фазовая диаграмма, изображённая на Рис. 1.8 и 1.9, содержит множество различных областей и имеет сложную структуру. Ситуация упрощается для различных предельных случаев, которые могут быть исследованы более детально. Ниже мы исследуем некоторые предельные случаи, которые могут быть экспериментально реализованы. Сильные течения исследуются в отдельном Пункте 1.7.

1.6.1. Почти вращательные течения и предел большого контраста вязкости

Рассмотрим предел $\Lambda \gg 1$. Согласно определению (1.43), предел $\Lambda \rightarrow \infty$ достигается, когда либо $\omega/s \rightarrow \infty$, где s и ω суть сила растяжения и вращения внешнего потока, см. (1.5), либо при $a \rightarrow \infty$, где a есть “обобщённый” контраст вязкости (1.38). Вариант $\omega/s \rightarrow \infty$ соответствует чисто вращательному внешнему потоку, в котором жидкость вращается как целое со всеми своими включениями. Вариант $a \rightarrow \infty$ соответствует твердотельному поведению везикулы, для которого должен воспроизводиться результат Джеффери [55]. Из [55] следует, что для внешних течений с $\omega > \sqrt{\Delta}s$ твёрдый эллипсоид находится в режиме кувыркания ¹

В соответствии с приведённым анализом (1.47) мы приходим к заключению, что в пределе $\Lambda \gg 1$ везикула вращается с угловой скоростью ω , определяющуюся внешним течением, и сохраняя при этом почти равновесную форму. Слабые отклонения от равновесной формы, вызванные воздействием растягивающей частью внешнего потока, малы вследствие усреднения по относительно быстрому

¹Специальный предел $a \rightarrow \infty$ при фиксированном $\omega/s \ll \sqrt{\Delta}$ (также соответствующий $\Lambda \rightarrow \infty$) требует специального исследования, поскольку он не описывается уравнением (1.39), в котором член $s_i n^i n^j$ написан в главном приближении по Δ . Хотя везикула и ведёт себя в этом пределе как твёрдое тело, она находится в режиме параллельного переноса.

вращению. Таким образом, в главном приближении форма везикулы описывается углами ϑ_v , ϕ_v (1.46). Угол ϕ_v линейно растёт со временем. Отдельной задачей является поиск угла ϑ_v между главной осью везикулы и плоскостью OXY .

Динамика ϑ_v оказывается на много медленней вращения везикулы вокруг оси OZ . Для того, чтобы найти динамическое уравнение на ϑ_v , нужно учесть малые отклонения “углов” Θ , J , Φ и Ψ от их равновесного значения (1.46). Эти малые отклонения разделяются на два вклада, один из которых осциллирует во времени, а второй, индуцированный осциллирующим вкладом, постоянен. Осциллирующие вклады и индуцированные постоянные добавки могут быть найдены разложением уравнений (1.47). После этого уравнение на ϑ_v может быть получено, например, усреднением уравнения в (1.47) на J по быстрым осцилляциям. Результат этой весьма громоздкой процедуры записывается тем не менее в достаточно простой форме:

$$\tau \partial_t \vartheta_v = \frac{\sin(2\vartheta_v)}{192\Lambda^2} \{12[\cos(2\vartheta_v) - 7] + S^2[1 - 3\cos(2\vartheta_v)] \cos \vartheta_v\}. \quad (1.59)$$

Здесь подчеркнём, что уравнение (1.59) применимо в области $S \ll \Lambda$.

Кувыркание и прецессирование соответствуют различным стационарным решениям ур. (1.59), которые могут находиться путём приравнивания нулю правой части уравнения. Решение $\vartheta_v = \pi/2$ оказывается всегда неустойчивым. Напротив, решение $\vartheta_v = 0$, соответствующее кувырканию, всегда устойчиво. Если $S > S_{bd}$, где

$$S_{bd} = \sqrt{\frac{78\sqrt{10} - 120\sqrt{3}}{263\sqrt{10} - 480\sqrt{3}}} \approx 11.48, \quad (1.60)$$

то существует ещё два стационарных решения, одно устойчивое и одно неустойчивое. Устойчивое стационарное решение соответствует режиму прецессирования, который, следовательно, может реализоваться при $S > S_{bd}$ в пределе больших $\Lambda \gg 1$. Значение $S = S_{bd}$ есть левая граница области устойчивости режима прецессирования, см. Рис. 1.3. Стационарное значение угла ϑ_v уменьшается по мере

увеличения S , оно равно $\arcsin \sqrt{4 - 2\sqrt{10}/\sqrt{3}}$ при $S = S_{bd}$, а при больших S имеет асимптотику $24/S^2$.

1.6.2. Чисто растягивающее течение

Чисто растягивающее плоское течение соответствует случаю $\omega = 0$, т.е. ненулевые матричные элементы градиента скорости внешнего потока равны $\partial_y V_x = \partial_x V_y = s$. Таким образом, растяжение внешнего потока в наших обозначениях направлено под углом $\pi/4$ к осям OX и OY .

В соответствии с определением (1.43) условие $\omega = 0$ приводит к значению параметра $\Lambda = 0$. В этом случае система уравнений (1.51,1.52) имеет стационарную устойчивую точку Φ_0, Θ_0 , задающуюся уравнениями

$$\Phi_0 = \pi/4, \quad S \sin \Theta_0 = \cos(3\Theta_0). \quad (1.61)$$

По мере возрастания параметра S “угол” Θ_0 монотонно убывает от $\pi/6$ до нуля. Значение $\Phi_0 = \pi/4$ вполне понятно, поскольку оно соответствует ориентации везикулы вдоль оси растяжения, как следует из (1.50). В пределе $S \gg 1$ оба “угла” релаксируют к своим стационарным значениям со скоростью порядка $s/(\sqrt{\Delta} a)^{-1}$.

1.6.3. Слабые внешние течения

Рассмотрим слабые внешние течения, для которых $S \ll 1$. Мы уже обсуждали этот предел в Пункте 1.2.3 с феноменологической точки зрения. Здесь этот предел рассматривается для квази-сферических везикул. Для того, чтобы определить значение феноменологической константы D , введённой в ур. (1.32), нет необходимости рассматривать полное уравнение (1.47), а достаточно ограничиться рассмотрением сектора $J = 0$ и использовать уравнения (1.51,1.52) на “углы” Θ и Φ .

Из (1.51) следует, что при $S \ll 1$ значение “угла” Θ близко к $\pi/6$, что является

устойчивой точкой. Подставляя значение $\Theta = \pi/6$ в (1.52), получаем замкнутое уравнение на “угол” Φ :

$$\tau \partial_t \Phi = (S/\sqrt{3}) \cos(2\Phi) - S\Lambda/2. \quad (1.62)$$

При $\Lambda < 2/\sqrt{3}$ уравнение (1.62) имеет устойчивую стационарную точку

$$\Phi = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\sqrt{3}\Lambda}{2} \right). \quad (1.63)$$

При $\Lambda > 2/\sqrt{3}$ все решения соответствуют неограниченно возрастающему $\Phi(t)$, т.е. режиму кувыркания. Таким образом, значение $\Lambda = 2/\sqrt{3}$ является точкой перехода из режима параллельного переноса в режим кувыркания. .

Значение $\Theta = \pi/6$ в выражении (1.50) описывает вытянутую аксиально симметричную везикулу с главной осью, направленной вдоль вектора (1.33) с $\phi_v = \Phi$ $\vartheta_v = 0$. Сравнивая уравнения (1.62) и (1.34) (полученного для сдвигового течения с $s = \omega = \dot{\gamma}/2$), получаем

$$D = \frac{8\sqrt{10\pi}}{3a\sqrt{\Delta}}. \quad (1.64)$$

Как и должно быть, точка перехода $D = 1$ соответствует значению $\Lambda = 2/\sqrt{3}$. Подчеркнём, что значение (1.64) не зависит от характера внешнего течения . Поэтому уравнение (1.32) с параметром (1.64) верно для любых слабых внешних течений.

В твердотельном пределе $a \rightarrow \infty$ (когда вязкость внутренней жидкости или поверхностная вязкость мембраны велики) величина (1.64) стремится к нулю. Однако учёт высших поправок по функции деформации u показывает, что в этом пределе D прекращает уменьшаться на значении порядка $\sqrt{\Delta}$. Уменьшение D , как следует из (1.34,1.35), приводит к твердотельному вращению везикулы в частном случае сдвигового потока, Это находится в согласии с результатом Джеффри [55], который показал, что при $\omega > \sqrt{\Delta}s$ твёрдый эллипсоид вращается во внешнем плоском поле скорости.

1.7. Сильное внешнее течение

Здесь мы изучаем предел сильных внешних течений, определяемый неравенством $S \gg 1$. В этом пределе форму везикулы и её динамику в первую очередь определяет внешнее течение. Изгибные силы мембраны оказываются намного слабее сил, возникающих на мембране в качестве реакции на воздействие внешнего потока. Тем не менее выясняется, что изгибными силами нельзя пренебрегать в пределе $S \gg 1$. Более того, наш анализ, в который включены изгибные силы, оказывается верным и в пределе сверхсильных течений $S \gg 1/\sqrt{\Delta}$.

1.7.1. Усечённые уравнения

В пределе сильных течений, когда S велико, последний член в правой части ур. (1.47), соответствующий изгибным силам мембраны, мал по сравнению с первым. После пренебрежения этим членом мы приходим к следующей системе уравнений в терминах “углов”, введённых в (1.44):

$$\begin{aligned} (\tau/S) \partial_t \Theta &= -\sin \Theta \sin(2\Phi), & (\tau/S) \partial_t \Phi &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(2\Phi)}{\cos \Theta} - \Lambda \right], \\ (\tau/S) \partial_t \Psi &= \Lambda/2, & \partial_t J &= 0. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Система (1.65) соответствует пределу, рассмотренному Мисба в [14], а затем Влаховска и Грация в [28]. В этом Подпункте мы находим решения системы (1.65). Соотношение этих решений с наблюдаемым поведением везикулы будет обсуждаться в следующем Подпункте.

Система уравнений (1.65) имеет два интеграла движения: J и интеграл Υ , который мы вводим через равенство

$$\frac{\sin \Upsilon}{\Lambda - \cos \Upsilon} = \frac{\sin \Theta}{\Lambda - \cos \Theta \cos(2\Phi)}. \quad (1.66)$$

Для того, чтобы однозначно определить Υ , мы выбираем корень уравнения (1.66), лежащий в области $|\Upsilon| < \pi/2$ при $\Lambda < 1$ и в области $|\Upsilon| < \arccos(1/\Lambda)$ при $\Lambda > 1$.

Существование интегралов движения показывают, что эволюция везикулы, описываемой системой уравнений (1.65), зависит от начальных условий (которыми определяется значение интегралов движения).

Система уравнений (1.65) может быть полностью проинтегрирована. Для этого мы вводим переменную

$$\rho = \exp \left\{ (S/\tau) \int_0^t dt' \cos[\Theta(t')] \sin[2\Phi(t')] \right\}. \quad (1.67)$$

Удобно выбрать момент начала отсчёта времени, когда $\Phi = 0$ и $|\Theta| < \arccos(1/\Lambda)$ (такой момент существует для любых начальных условий). Тогда начальными условиями становится $\rho = 1$ и $\partial_t \rho = 0$, и из системы уравнений (1.65) можно получить следующее уравнение

$$(\tau/S)^2 \partial_t^2 \rho = -(\Lambda^2 - 1)\rho + \Lambda^2 - \Lambda \cos \Upsilon, \quad (1.68)$$

которое легко может быть решено в явном виде. Параметры Φ и Θ выражаются через переменные ρ и Υ посредством равенств

$$\cos \Theta \cos(2\Phi) = \Lambda - (\Lambda - \cos \Upsilon)/\rho, \quad (1.69)$$

$$\cos \Theta \sin(2\Phi) = (\tau/S) \partial_t \rho / \rho. \quad (1.70)$$

Решение уравнения (1.68) ведёт себя различным образом при $\Lambda < 1$ $\Lambda > 1$. Если $\Lambda < 1$, то переменная ρ растёт экспоненциально со временем, поэтому правые части (1.69,1.70) стремятся к постоянным значениям

$$\Theta = 0, \quad 2\Phi = \arccos \Lambda. \quad (1.71)$$

Таким образом, мы получаем режим параллельного переноса. Отметим, что восстановление в усечённой системе уравнений (1.65) члена, возникающего из изгибных сил мембраны, изменит положение стационарной точки (1.71) на малую величину порядка $1/S$, которой в пределе $S \gg 1$ можно пренебречь.

Если $\Lambda > 1$, то переменная ρ испытывает гармонические колебания. Следовательно, динамике везикулы соответствует замкнутая траектория на плоскости $\Theta - \Phi$, которая определяется значением Υ . Если абсолютное значение угла Φ неограниченно растёт, т.е. траектория разделяет полюсы $\Theta = \pm\pi/2$ между собой, то везикула находится в режиме кувыркания. В противном случае, если Φ претерпевает ограниченные осцилляции, замкнутая траектория соответствует покачиванию.

Для усечённой системы уравнений (1.65) режимы кувыркания и покачивания сосуществуют при любом значении параметра Λ . Выбор между режимами определяет параметр Υ . Если $\cos \Upsilon > 2\Lambda/(\Lambda^2 + 1)$, замкнутая траектория соответствует кувырканию, в обратном случае она соответствует покачиванию. Если Υ принимает одно из граничных значений, для которых $\cos \Upsilon = 1/\Lambda$, то замкнутая траектория вырождается в точку

$$\Phi = 0, \quad \cos \Theta = 1/\Lambda. \quad (1.72)$$

Таким образом, даже при $\Lambda > 1$ усечённая система уравнений (1.65) имеет две стационарные точки, соответствующие режиму параллельного переноса.

1.7.2. Медленная динамика

Мы показали, что усечённая система уравнений (1.65) может быть полностью проинтегрирована. Эта система, однако, не может быть непосредственно использована для динамики везикулы при сильных течениях $S \gg 1$ с $\Lambda > 1$. Действительно, режим движения везикулы сильно зависит от начальных условий, дающих бесконечное множество замкнутых траекторий для любого $\Lambda > 1$. Это свойство очевидным образом противоречит свойствам диссипативной системы, а также с результатами Пункта 1.4.1. Противоречие снимается, если восстановить члены, опущенные при написании усечённой системы уравнений (1.65), и возникающих из последнего (нелинейного по U) члена в правой части (1.47). Восстановленный

член, пропорциональный κ , изменяет свойства динамики везикулы, приводя к относительно медленной динамике обоих интегралов движения J and Υ . Это приводит к фиксации одного из возможных вариантов динамического режима независимо от начальных условий.

Ниже мы рассматриваем область $\Lambda > 1$, в которой решением усечённых уравнений (1.65) являются замкнутые траектории. Рассматривая полную систему уравнений, можно произвести разделение быстрого движения вдоль квази-замкнутых траекторий и относительного медленного дрейфа “интегралов движения”, которые теперь следует называть медленными переменными. Характерное время быстрого движения есть τ/S , а характерное время изменения медленных переменных равно просто τ . Большое отношение этих времён как раз и даёт возможность разделения движения на быстрое и медленное. Система уравнений описывающих дрейф медленных переменных получается из исходной полной системы уравнений (1.47) усреднением производных по времени от величин J и Υ по быстрому движению вдоль квази-замкнутых траекторий. Результат может быть символически записан в виде

$$\tau \partial_t \Upsilon = \dot{\Upsilon}, \quad \tau \partial_t J = \dot{J}, \quad (1.73)$$

где $\dot{\Upsilon}$ и \dot{J} есть некоторые функции Υ, J, Λ .

Динамические уравнения (1.73) имеют стационарные точки, определяемые условиями $\dot{\Upsilon} = 0$ и $\dot{J} = 0$. Выражение для \dot{J} антисимметрично по J , что является следствием симметрии исходных динамических уравнений относительно отражения $z \rightarrow -z$ (или $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$). Следовательно, существует стационарная точка с $J = 0$, соответствующая форме везикулы, симметричной относительно отражения $z \rightarrow -z$.

Для симметричного случая $J = 0$ из уравнений (1.51,1.52,1.66) находим, что $\dot{\Upsilon} = \langle (\partial \Upsilon / \partial \Theta) \cos(3\Theta) \rangle$, где угловые скобки означают усреднение по периоду

быстрого движения. Вычисляя среднее, получим

$$\dot{\Upsilon} = \frac{\Lambda(\Lambda \cos \Upsilon - 1)}{\Lambda^2 - 1} \left[1 - \frac{4|\mathfrak{U}| (\Lambda^2 - 1)^{3/2}}{\Lambda (\mathfrak{U}^2 + 1)^{3/2}} \right], \quad (1.74)$$

где $\mathfrak{U} = (\Lambda - \cos \Upsilon) \csc \Upsilon$. Заметим, что выражение (1.74) симметрично по Υ . Это является следствием уравнений (1.65) и соотношения (1.66), из которого следует, что при преобразовании $\Upsilon \rightarrow -\Upsilon$ решение преобразуется по закону $\Theta \rightarrow -\Theta$ и $\Phi \rightarrow \Phi$. Поэтому среднее от любой чётной по Θ функции, например, $\dot{\Upsilon}$, должно быть чётно по Υ .

Стационарные точки с $J = 0$ находятся из (1.74) приравниванием правой части нулю. Если $1 < \Lambda < \sqrt{2}$, то существуют две стационарные точки, $\Upsilon = \arccos(1/\Lambda)$ и $\Upsilon = -\arccos(1/\Lambda)$. Эта ситуация соответствует режиму параллельного переноса. Первая стационарная точка (1.72) устойчива, а вторая точка неустойчива. При $\Lambda > \sqrt{2}$ точка $\Upsilon = \pm \arccos(1/\Lambda)$ остаётся стационарной, но становится неустойчивой, а точка $\Upsilon = -\arccos(1/\Lambda)$ хоть и становится устойчивой по отношению к вариациям Θ - Φ переменных, сохраняет неустойчивость по отношению к вариациям с ненулевым J . Кроме этого, при $\Lambda > \sqrt{2}$ возникает новая пара стационарных точек с $\Upsilon = \pm \Upsilon_0$, где Υ_0 находится приравниванием нулю выражения в квадратных скобках в (1.74). Устойчива точка с положительным $\Upsilon = \Upsilon_0$, а вторая точка, соответственно, неустойчива. Решение $\Upsilon = \Upsilon_0$ может соответствовать как покачиванию, так и кувырканию, в зависимости от Λ . Численное исследование выражения (1.74) показывает, что пограничным значением Υ является $\Lambda \approx 1.52$, при этом область $\Lambda > 1.52$ соответствует кувырканию, а область $\Lambda < 1.52$ – покачиванию.

Если $\Lambda > \sqrt{3}$, то существует ещё одна стационарная устойчивая точка уравнений (1.73), в которой

$$J = (1/2) \arccos((\Lambda^2 - 4)/(\Lambda^2 - 1)) \quad (1.75)$$

а $\Upsilon = -\arccos(1/\Lambda)$. При этом значения “углов” $\Phi = 0$, $\Theta = -\arccos(1/\Lambda)$, а

“угол” Ψ линейно растёт со временем, $\partial_t \Psi = (S/\tau)\Lambda/2$. Это решение соответствует режиму прецессирования, обсуждавшемуся в Пункте 1.4.3. Значение $\Lambda = \sqrt{3}$ определяет асимптотику границы области существования режима прецессирования при больших S , изображённую на Рис. 1.3.

Полученные результаты находятся в согласии с общим анализом, проведённым в пункте в Пункте 1.4.

1.7.3. Сверхсильные течения

Анализ, проведённый в предыдущих Пунктах, верен, строго говоря, только для не слишком сильных течений с $S \lesssim 1/\sqrt{\Delta}$. При анализе более сильных течений в нашем рассмотрении в динамическом уравнении на u нужно учесть дополнительные члены, связанные с высшими поправками по u , которые при $1/\sqrt{\Delta} \lesssim S$ становятся больше части уже учтённых в (1.40). Величина поправок такого сорта оценивается как su . Эти поправки связаны с влиянием отклонения формы везикулы от сферической на решение уравнения Стокса для внутренней и внешней задач. Эти поправки возникают из обеих частей $\mathbf{v}^{(s)}$ и $\mathbf{v}^{(\kappa)}$ скорости мембраны, см. (1.16), но существенной оказывается только поправка к первому слагаемому $s^j n^i n^j$ в правой части (1.40), связанному с $\mathbf{v}^{(s)}$, а поправка ко второму слагаемому в правой части (1.40), связанная с частью $\mathbf{v}^{(\kappa)}$ в скорости мембраны, всегда остаётся малой и ею можно пренебречь.

Отметим следующее обстоятельство, заключающееся в том, что есть некоторая принципиальная разница между членами $\mathbf{v}^{(s)}$ и $\mathbf{v}^{(\kappa)}$. Если пренебречь вкладом $\mathbf{v}^{(\kappa)}$, то уравнения движения везикулы получают дополнительную симметрию, см. Подпункт 1.1.3. Поскольку оси выбранной нами системы отсчёта связаны с собственными векторами матрицы растяжения внешнего потока \hat{s} , пространственная инверсия эквивалентная преобразованию $\phi \rightarrow -\phi$, $\vartheta \rightarrow \vartheta$, или, что то же самое, преобразованию $\Phi \rightarrow -\Phi$, $\Psi \rightarrow -\Psi$, $\Theta \rightarrow \Theta$ и $J \rightarrow J$ в терминах “углов” (1.44).

Таким образом, точные уравнение движения “углов” должны быть инвариантны по отношению к преобразованию

$$t \rightarrow -t, \Phi \rightarrow -\Phi, \Theta \rightarrow \Theta, \Psi \rightarrow -\Psi, J \rightarrow J, \quad (1.76)$$

в пренебрежении изгибными силами мембраны. Легко можно проверить, что усечённые уравнения (1.65) инвариантны по отношению к преобразованию (1.76).

Воспользуемся теперь тем, что эта симметрия сохраняется и в том случае, если учесть высшие вклады по u , оставив ограничение $\kappa \rightarrow 0$. Если учесть поправки порядка su к усечённой системе уравнений (1.65), то система замкнутых траекторий движения, которая имеет место при $\Lambda > 1$, не изменит свою топологию вследствие относительной малости введённого возмущения. Сохранение топологии легко понять, ограничившись случаем $J = 0$. При этом на атласе 1.2 после учёта поправок типа su не может появиться аттракторов, поскольку их существование нарушало бы инвариантность уравнений при $\kappa = 0$ относительно инверсии времени. Следовательно, и в этой ситуации возможно следовать проделанной в предыдущем Подпункте схеме, основанной на сохранении величин Υ и J . Поскольку при преобразование (1.76) даёт замену $\Upsilon \rightarrow \Upsilon$, то уравнение на Υ при ограничении $\kappa = 0$ вырождается в $\partial_t \Upsilon = 0$. Таким образом, поправки типа su не разрушают сохранение величины Υ . Аналогично можно показать, что эти поправки не нарушают сохранения параметра J .

Таким образом, поправки связанные с s -членом в уравнении на u слабо деформируют замкнутые траектории, но не нарушают закона сохранения интегралов движения. Следовательно, по прежнему остаётся принципиальное значение за членом с κ . Этот член даёт дрейф медленных переменных, фиксируя их асимптотическое по времени значение. Поскольку теперь дрейф происходит в пространстве слабо деформированных квази-замкнутых траекторий, по сравнению с найденными из ур. (1.65), окончательные результаты для асимптотических значений Υ и J не изменятся в главном приближении по параметру избыточной площади

Δ . Поэтому результаты, полученные для сильных течений, могут быть непосредственно обобщены на случай сверхсильных течений $S > 1/\sqrt{\Delta}$.

1.8. Заключение

Мы исследовали динамику квази-сферической везикулы во внешнем потоке. Главным образом мы уделили внимание случаю плоского внешнего потока, и в частности, случаю сдвигового потока. Наша схема вычислений основана на решении трёхмерного уравнения гидродинамики (уравнения Стокса) с граничными условиями, наложенными на мембране. Мы учли как изгибные силы, так и поверхностную вязкость мембраны. Мы показали, что в стационарном внешнем потоке поведение везикулы определяется двумя независимыми безразмерными параметрами, которые являются комбинациями параметров везикулы и градиента скорости внешнего потока.

Одним из наиболее интересных явлений в динамике везикулы является переход из режима параллельного переноса в режим, сопровождающийся периодическим изменением формы везикулы. Этот режим осуществляется при относительно больших контрастах вязкости или же во внешних течениях, в которых доминирует вращательная компонента. Мы показали, что в относительно слабых течениях происходит непосредственный переход из режима параллельного переноса в режим кувыркания, тогда как в противоположном случае сильных течений наблюдается промежуточный режим покачивания. Такая картина находится в согласии с экспериментами Канцлера и Штайнберга [12] и численным моделированием Ногучи и Гомппера [15]. Мы также предсказываем существование ещё одного режима, названного нами прецессированием, который должен наблюдаться в сильных внешних течениях. В режиме прецессирования, который сосуществует с режимом кувыркания, форма везикулы совершает сложные колебания, напоминающие при этом прецессию.

Возможность существования промежуточного режима между режимами параллельного переноса и кувыркания теоретически предсказывалась Мисба [14], а затем (качественно) Ногучи и Гомппером [15]. Заметим однако, что вычислительная схема, использовавшаяся Мисба в [14], а затем развитая Влаховска и Грация в [28] не самосогласована, хотя в уравнении, описывающем динамику формы везикулы, эти авторы и удержали все первые члены разложения по степени несферичности везикулы. Это приводит к сильной зависимости динамики везикулы от начальных условий. Устранение этого недостатка достигается путём включения в уравнение некоторых следующих членов разложения, имеющих своим происхождением изгибные силы мембраны. Эта поправка была учтена нами в Главе 1.

Влияние высших членов разложения по малому параметру Δ исследовалось также в [42] с точки зрения приложений результатов рассмотрения к реологии суспензии везикул. Авторы рассмотрели ту же физическую ситуацию, что и мы в Главе 1, а схема разложения по малому параметру Δ методологически схожа с нашей схемой разложения. Удерживая только вклад сферической гармоники второго порядка в уравнение движения, они произвели разложение всех членов уравнения вплоть до третьего порядка по $\sqrt{\Delta}$. В результате авторы [42] воспроизвели уравнение, приведённое в [32] с добавленным членом порядка $S\sqrt{\Delta}$ (в наших обозначениях). В Пункте 1.7 мы показали, что эти поправки приводят к малому по Δ смещению линий переходов на фазовой диаграмме. Кроме того, из сравнения фазовых диаграмм работ [32, 42] следует, что даже для $\Delta \sim 1$ смещение линий переходов оставляет в сохранности основные особенности фазовой диаграммы. Таким образом, наш вывод о том, что динамика везикулы во внешнем плоском потоке задаётся всего двумя безразмерными параметрами, подтверждается, что находится в противоречии с некоторыми выводами работы [42].

Мы показали, что свойства переходов из режима параллельного переноса в режим кувыркания и из режима параллельного переноса в режим покачивания

принципиально различны. Первый из этих переходов сопровождается развалом седловой точки, а второй – бифуркацией Хопфа. Мы нашли “мягкие” степени свободы, ответственные за эти переходы. Наша теория предсказывает существование специальной точки на фазовой диаграмме, в которой соединяются эти две линии переходов. При приближении вдоль линий перехода к этой специальной точке должно наблюдаться дополнительное “критическое” замедление динамики везикулы. В Главе 1 мы выводим степенные законы этого замедления.

Мы исследовали предельный случай квази-сферических везикул, предполагая что коэффициент избыточной площади $\Delta \ll 1$. Эта малость позволила нам использовать схему вычислений, приводящую к компактному уравнению движения поверхности везикулы, решения которого оказывается возможным полностью исследовать. Мы полагаем, что качественные результаты нашей теории остаются верными и для везикул с произвольным коэффициентом избыточной площади порядка единицы, $\Delta \sim 1$. Действительно, характер разрушения режима параллельного переноса должен быть различным при малых течениях (см. Пункт 1.2.3) и при сильных течениях. Следовательно, в области где эти линии переходов соединяются, должно происходить дополнительное замедление динамики везикулы.

Отметим наконец, что нужно быть аккуратным при сравнении нашей теории с результатами эксперимента вследствие того, что в наших вычислениях мы игнорировали тепловой шум. В общем случае тепловой шум играет малую роль в динамике везикулы, поскольку изгибный модуль κ заметно больше температуры. Тем не менее, в узких окрестностях переходов из режима параллельного переноса тепловые флуктуации становятся заметны вследствие появления медленных степеней свободы у везикулы. Мы частично разбираем влияние тепловых флуктуаций в Главе 2 в пределе сильных течений $S \gg 1$. Полное исследование роли тепловых флуктуаций остаётся за рамками предлагаемой диссертации.

Глава 2

Реологические свойства взвеси везикул

В этой Главе 2 исследованы реологические свойства взвеси везикул в пределе сильных стационарных плоских потоков, разрушающих стационарную форму везикул. Случай сильного плоского течения, характеризующегося неравенством $S \gg 1$, обсуждался в Главе 1 и в частности в Пункте 1.7.

Нами получена зависимость эффективной вязкости суспензии от градиента скорости и физических свойств везикул. Установлено, в частности, что эффективная вязкость суспензии может сильно зависеть от её начального состояния. Проанализировано влияние тепловых флуктуаций на реологические свойства суспензии.

Исследование реологических свойств суспензии непосредственно опирается на результаты, полученные нами для динамики отдельной везикулы в Главе 1. Реологическим свойствам везикулярной взвеси посвящена работа [62], которая, однако, основывалась на неполных результатах [14].

2.1. Эффективная вязкость суспензии

Эффективная мгновенная вязкость суспензии η_s определяется выражением

$$\eta_s = \eta W/W^{(0)}, \quad (2.1)$$

где затрачиваемые внешними силами мощности W и $W^{(0)}$ при течении суспензии и чистой жидкости соответственно измеряются при одинаковых граничных условиях на скорость (см., например, [63]). Течение происходит при малых числах Рейнольдса, поэтому оно описывается стационарным уравнением Стокса. Вслед-

ствие этого затрачиваемая мощность W приводится к виду (см. Приложение Б)

$$W = W^{(0)} + \sum_a W^a. \quad (2.2)$$

В (2.2) суммирование происходит по всем взвешенным везикулам, а W^a можно назвать мощностью, поглощаемой отдельной везикулой. Представим скорость растворителя в суспензии в виде $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \delta\mathbf{v}$, где \mathbf{V} – скорость течения чистой жидкости. (Мы предполагаем, что градиент невозмущённого поля скорости $\partial_j V^i$ постоянен в пространстве.) Рассмотрим отдельную везикулу и определим для неё введённую параметризацией (1.17) сферическую систему координат. Слагаемое W^a в (Б.8), относящееся к рассматриваемой везикуле, можно записать в виде интеграла по по сфере $r = R$,

$$W^a = -\frac{5\eta\mathcal{V}}{2} \int \frac{d\omega}{4\pi} 3 \partial_j V^i n^i n^j \left[\frac{4\delta v^r}{R} + \partial_r \delta v^r \right] \Big|_{r=R}, \quad (2.3)$$

где $d\omega$ есть элемент телесного угла. Равенство (2.3) написано в предположении постоянства объёма везикулы. В (2.3) $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ есть единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора. Значение поля скорости $\delta\mathbf{v}$ на сфере $r = R$ получается его аналитическим продолжением из области, заполненной растворителем.

Мы рассматриваем предел разбавленной суспензии, когда объёмная доля φ , занимаемая взвешенными частицами мала, $\varphi \ll 1$. В разбавленном пределе можно считать, что каждая взвешенная частица находится в невозмущённом поле скорости \mathbf{V} и не взаимодействует через поле скорости с соседними частицами.

В Главе 1 была найдена динамика формы везикулы во внешнем потоке скорости. Для нахождения значений δv^r , $\partial_r \delta v^r$ в (2.3) нужно связать граничные условия на поверхности везикулы с граничными условиями на поверхности сферы радиуса R . Эта связь оказывается существенно нелинейной, и в общем случае записывается в интегральном виде (см., например, [25]). В случае квазисферической везикулы эти уравнения можно упростить, разложив их по малому параметру $\sqrt{\Delta}$ до первого порядка.

Из вида квадратной скобки в (2.3) следует, что нас интересует два граничных условия: связь между скоростью жидкости и скоростью изменения формы везикулы (1.20), и условие несжимаемости мембраны, записанное в форме (1.7). Для того, чтобы учесть отклонение формы везикулы от сферической, надо выписывать эти граничные условия следующем порядке по $\sqrt{\Delta}$ по сравнению с той точностью, которой мы придерживались при выводе уравнения движения поверхности везикулы (1.37) (см. Приложение А.3). Производя процедуру разложения нужно учитывать, что функции u и \dot{u} в общем случае имеют первый и нулевой порядок по $\sqrt{\Delta}$ соответственно. Эта процедура проделана в Приложении А.4. В результате получаем

$$\begin{aligned}\delta v^r/R &= -s_{ij}n^i n^j + \dot{u} + u\dot{u} - \omega \partial_\phi u / \sin^2 \theta, \\ \partial_r \delta v^r &= -s_{ij}n^i n^j + 5u\dot{u} - (15/2)hu.\end{aligned}\tag{2.4}$$

В (2.4) в обеих частях подразумевается взятие проекции на сферическую гармонику второго порядка, поскольку только она вносит ненулевой вклад в интеграл (2.3). В правых частях (2.4) слагаемое $-s_{ij}n^i n^j$ остаётся единственным, если вместо везикулы взять твёрдую сферу радиуса R .

2.2. Средняя по времени эффективная вязкость

Для вычисления среднего по времени значения эффективной вязкости суспензии величины (2.4) надо усреднить по везикулам и времени. При этом полные производные по времени исчезают, и в (2.4) оказываются существенными только первые и последние слагаемые. Безразмерное отклонение эффективной вязкости (2.1) от её значения для чистой жидкости оказывается равным

$$\frac{\eta_s - \eta}{\varphi\eta} = \frac{5}{2} + \langle \sqrt{\Delta} Q \rangle_{\text{vesicles}}.\tag{2.5}$$

В правой части (2.5) мы выделили слагаемое $5/2$, соответствующее вкладу в вязкость твёрдых сфер радиуса R [33, 64]. Угловые скобки означают усреднение по

всем везикулам. В случае плоского течения величина Q для одной везикулы определяется равенством

$$Q = \frac{5\sqrt{15}}{8\pi} \left\langle \frac{\sqrt{6}}{7} \sin \Theta \cos J - \frac{\omega}{s} \cos \Theta \cos(2\Phi) \right\rangle_{\text{time}} \quad (2.6)$$

и в общем случае принимает значения порядка единицы. В (2.6) угловые скобки означают усреднение по времени.

При $\Lambda < \sqrt{2}$ везикула находится в режиме параллельного переноса, в котором форма и ориентация везикулы, найденные в Главе 1, остаются постоянными. Усреднение по времени в (2.6) сводится к исключению процесса релаксации формы везикулы к стационарному состоянию (1.71), в результате чего получаем

$$Q = \frac{5\sqrt{15}}{8\pi} \cdot \begin{cases} -(\omega/s)\Lambda, & 0 < \Lambda < 1, \\ \frac{\sqrt{6}}{7} \sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2}} - \frac{\omega}{s\Lambda}, & 1 < \Lambda < \sqrt{2}. \end{cases} \quad (2.7)$$

При $\Lambda > \sqrt{2}$ везикула переходит в режим покачивания, который при дальнейшем увеличении Λ трансформируется в режим кувыркания. В этих режимах и форма и ориентация везикулы испытывают периодические колебания. Поэтому усреднение по времени (2.6) становится существенным. Чтобы провести это усреднение, надо воспользоваться уравнениями движения формы везикулы, в главном приближении описываемые уравнением (1.68). При этом значение медленной переменной Υ в (1.68) должно определяться её асимптотическим по времени значением из ур. (1.74). Результат оказывается достаточно громоздким, и в формульном виде мы здесь его приводить не будем. Отметим только, что при $\Lambda \gg 1$ значение Q стремится к числу ≈ 0.13 . Полный график зависимости Q от Λ приведён на Рис. 2.1.

При $\Lambda > \sqrt{3}$ везикула может находиться также и в режиме прецессирования. Выбор между режимом кувыркания и прецессирования зависит от исходного состояния везикулы. В режиме прецессирования величина Q оказывается равной

$$Q = -\frac{5\sqrt{15}}{8\pi\Lambda} \left(\frac{\sqrt{3(2\Lambda^2 - 5)}}{7} + \frac{\omega}{s} \right). \quad (2.8)$$

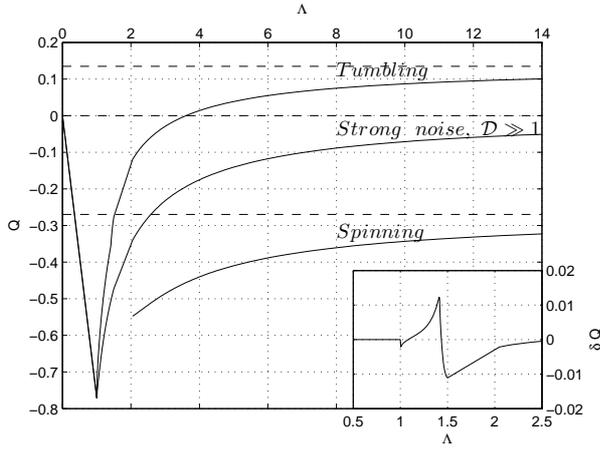


Рис. 2.1. Рис. 1. Зависимость величины Q от параметра Λ для различных динамических режимов, а также её значение в пределе $\mathcal{D} \gg 1$. Вставка: зависимость поправки δQ для режимов параллельного переноса - покачивания - кувыркания при $\mathcal{D} = 0.01$.

При получении выражения (2.8) мы воспользовались найденными (1.75) параметрами движения везикулы в режиме прецессирования.

2.3. Влияние тепловых флуктуаций

Тепловые флуктуации могут быть учтены в уравнении (1.37) путём включения в него случайной силы ξ (см. [65]):

$$a_l [(\partial_t - \omega \partial_\phi)u]_{l,m} = 10 [s_{ij} n^i n^j]_{l,m} - \frac{1}{\eta R^3} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u_{l,m}} + \xi_{l,m}, \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) есть уравнение движения поверхности везикулы, спроектированное на сферическую гармонику $\mathcal{Y}_{l,m}$. Амплитуда коротко коррелированного во времени шума ξ должна определяться из того требования, чтобы в отсутствии внешнего течения тепловые флуктуации формы везикулы описывались функцией распределения Гиббса. Это требование приводит к следующим корреляционным соотношениям для теплового шума ξ [29]:

$$\langle \xi_{l,m}(t) \xi_{l',m'}^*(t') \rangle = \frac{2T a_l}{\eta R^3} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \delta(t - t'), \quad (2.10)$$

где T – температура, а a_l – кинетический коэффициент (А.46).

В стационарном внешнем потоке квази-сферическая везикула имеет гладкую форму, так что основной вклад в функцию деформации формы везикулы u есть сферическая гармоника второго порядка, см. (1.45). В терминах переменных $\{\Theta, \Phi, J, \Psi\}$ уравнения движения везикулы можно переписать в виде (1.47) для случая внешнего плоского течения. Не переписывая полностью системы (1.47), укажем слагаемые в правых частях, которые возникают при учёте теплового шума:

$$\begin{aligned}
\tau \partial_t \Theta &= \dots + \mathcal{D} [3 \operatorname{ctg}(2\Theta) + \operatorname{csc}(2\Theta)] + \xi_\Theta, & \langle \xi_\Theta(t) \xi_\Theta(t') \rangle &= 2\mathcal{D} \tau \delta(t - t'), \\
\tau \partial_t \Phi &= \dots + \xi_\Phi, & \langle \xi_\Phi(t) \xi_\Phi(t') \rangle &= \frac{\mathcal{D} \sec^2 \Theta}{2} \tau \delta(t - t'), \\
\tau \partial_t J &= \dots + \mathcal{D} \operatorname{ctg} J \operatorname{csc}^2 \Theta + \xi_J, & \langle \xi_J(t) \xi_J(t') \rangle &= 2\mathcal{D} \operatorname{csc}^2 \Theta \tau \delta(t - t'), \\
\tau \partial_t \Psi &= \dots + \xi_\Psi, & \langle \xi_\Psi(t) \xi_\Psi(t') \rangle &= 2\mathcal{D} \operatorname{csc}^2 J \operatorname{csc}^2 \Theta \tau \delta(t - t'),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Вследствие нелинейности преобразования от переменных U_ν (1.42) к переменным $\{\Theta, \Phi, J, \Psi\}$ (1.44), в правых частях уравнений на Θ и J в (2.11) появились контактные члены. Величина теплового шума определяется безразмерным коэффициентом $\mathcal{D} = T/(\kappa \Delta^{3/2})$.

Степень влияния тепловых флуктуаций на динамику везикулы сильно отличается для областей $\Lambda < 1$ и $\Lambda > 1$. При $\Lambda < 1$ везикула находится в состоянии параллельного переноса, причём время релаксации формы везикулы к стационарной форме определяется силой внешнего потока, см (1.68). Величина тепловых флуктуаций определяется отношением $T/(\Delta^2 \kappa S)$, которое при $S \gg 1$ остаётся малым. Поэтому при $\Lambda < 1$ вкладом тепловых флуктуаций в вязкость суспензии везикул можно пренебречь.

Как было показано в Пункте 1.7, при $\Lambda > 1$ свойства динамики везикулы сильно изменяются. Внешний поток вызывает движение точки $\{\Theta, \Phi, J, \Psi\}$ (1.45)

фазового пространства по квази-замкнутым траекториям. При движении по этим квази-замкнутым траекториям остаются постоянными две независимые медленные переменные, в обозначениях Пункта 1.7 Υ и J . Изменение со временем этих медленных переменных происходит за счёт действия изгибных сил, определяемых модулем κ (1.22). В связи с этим процесс релаксации медленных переменных к их стационарному состоянию происходит на значительно больших временах по сравнению с характерными временем колебаний везикулы, вызванных внешним потоком. Поэтому роль тепловых флуктуаций, приводящих к колебаниям значений медленных переменных, при $\Lambda > 1$ значительно возрастает и теперь определяется безразмерным параметром $\mathcal{D} = T/(\kappa\Delta^{3/2})$.

Рассмотрим сначала предел $\mathcal{D} \gg 1$. В этом пределе тепловые флуктуации настолько сильны, что в отсутствие внешнего течения разрушают равновесную форму везикулы. В таком случае можно пренебречь влиянием изгибных сил на динамику везикулы. Для получения среднего значения величины Q (2.6) нужно произвести усреднение сначала по траекториям с постоянным значением медленных переменных, а затем по функции распределения в пространстве медленных переменных, обусловленной тепловыми флуктуациями. Результат этой процедуры, которая до конца может быть произведена только численно, приведён на Рис. 2.1.

В обратном пределе $\mathcal{D} \ll 1$ происходит слабое возмущение кривых $Q(\Lambda)$, соответствующих режиму кувыркания и прецессирования. Интересна разность $\delta Q = Q(\Lambda, \mathcal{D}) - Q(\Lambda, 0)$ значений величины Q при ненулевом шуме и в его отсутствие.

Кривая $\delta Q(\Lambda)$ для режима кувыркания, изображённая на вставке Рис. 2.1, имеет особенность вблизи перехода из режима параллельного переноса в режим покачивания, при $\Lambda = \sqrt{2}$. Кроме того, она имеет особенность вблизи точки $\Lambda = 1$ по причине смены скорости релаксации, описанной выше. Отметим, что $\delta Q(\Lambda)$ не

имеет особенности вблизи точки перехода из режима покачивания в режим кувыркания, поскольку сам этот переход не сопровождается какими-либо сингулярностями в поведении везикулы, см. Подпункт 1.4.2.

Проведём исследование вблизи точки $\Lambda = \sqrt{2}$. Представим отклонения “углов” $\delta\Theta$, $\delta\Phi$ от их равновесного значения (1.71) при $\Lambda = \sqrt{2}$ в виде

$$\delta\Theta \approx m \cos \zeta, \quad 2\delta\Phi \approx m \sin \zeta, \quad m = \Upsilon - \arccos(1/\Lambda). \quad (2.12)$$

Параметр ζ растёт со скоростью $S\Lambda/2\tau$, что соответствует быстрому движению по квази-замкнутым траекториям с постоянным значением медленной переменной Υ , см. Подпункт 1.7. В случае слабого теплового шума и небольшого отклонения параметра Λ от значения $\sqrt{2}$, так что $\delta\Lambda = \Lambda - \sqrt{2} \ll 1$, амплитуда отклонения m остаётся малым параметром. Из (2.11) вытекают следующее уравнение на m , получающиеся усреднением по быстрому движению по квази-замкнутым траекториям

$$\tau \partial_t m = \epsilon m - \frac{m^3}{\sqrt{2}} + \frac{\mathcal{D}}{m} + \xi_m, \quad \langle \xi_m(t) \xi_m(t') \rangle = 2\mathcal{D} \tau \delta(t - t'), \quad (2.13)$$

$$\epsilon = 4\delta\Lambda - \frac{(23 + 4\sqrt{2})\mathcal{D}}{2}.$$

Перейдём от уравнения Ланжевена (2.13) к уравнению Фоккера-Планка. Используя соотношения (2.12), разложимся в (2.6) по малому параметру m , усреднив по быстрому движению по квази-замкнутым траекториям. После этих процедур получим, что функция распределения неотрицательной величины $q = Q(\Lambda, \mathcal{D}) - Q(\sqrt{2}, 0) - 0.52\delta\Lambda$ имеет вид

$$\mathcal{P} \propto \exp \left\{ -\frac{(q - (0.71\delta\Lambda - 2.5\mathcal{D}))^2}{0.089\mathcal{D}} \right\}. \quad (2.14)$$

Функция распределения (2.14) даёт особенность, изображённую на вставке Рис. 2.1.

При стремлении Λ к единице, когда $\Lambda - 1 = \delta\Lambda \ll 1$ основной вклад в тепловую поправку вязкости дают тепловые флуктуации параметра J , которые определяются средним $\langle J^2 \rangle = \mathcal{D} \sqrt{2/\delta\Lambda}$ (это равенство остаётся верным при $\delta\Lambda \gg \mathcal{D}^2$).

В связи с этой особенностью поправка к вязкости δQ стремится к постоянному отрицательному значению $\approx -0.27\mathcal{D}$ при $\delta\Lambda \rightarrow 0$. Наконец, в пределе больших $\Lambda \gg 1$ поправка δQ стремится к постоянному положительному значению $\approx 0.02\mathcal{D}$.

В режиме прецессирования при больших контрастах вязкости, когда $\Lambda \rightarrow \infty$, тепловая поправка δQ оказывается более чувствительной к тепловому шуму по сравнению с режимом кувыркания, $\delta Q \approx 0.2\sqrt{\mathcal{D}}$. При $\Lambda \rightarrow \sqrt{3}$ тепловая поправка стремится к постоянному значению $\delta Q \approx 1.3\mathcal{D}$. Распад режима прецессирования в режим кувыркания при $\Lambda = \sqrt{3}$ происходит через седловую точку. Тепловые флуктуации ускоряют этот распад, так что режим прецессирования становится неустойчивым при $\Lambda - \sqrt{3} \lesssim \mathcal{D}^{2/3}$.

2.4. Заключение

Везикула представляет из себя деформируемое тело. В настоящей Главе 2 показано, что следствием этого является зависимость эффективной вязкости суспензии (2.1) от геометрических характеристик потока. В пределе сильных плоских течений, где $S \gg 1$, эта зависимость наблюдается для области параметров $\Lambda \lesssim 1$. Согласно (2.5), относительная амплитуда колебаний эффективной вязкости η_s , связанных с зависимостью от отношения ω/s матричных элементов поля скорости, оказывается порядка $\sqrt{\Delta}$. Зависимость эффективной вязкости суспензии η_s от геометрических параметров поля скорости исчезает при $\Lambda \gg 1$: усреднённое по времени второе слагаемое в (2.6) (без множителя ω/s) пропорционально $1/\Lambda$ для всех трёх кривых на Рис. 2.1, тогда как усреднённое первое слагаемое в главном приближении не зависит от Λ .

В области параметров $\Lambda > \sqrt{3}$ возникает другой качественный эффект, состоящий в том, что вязкость суспензии зависит от исходного состояния суспензии и может быть изменена путём внешнего воздействия на везикулы. В режиме кувыркания везикулы обладают симметрией относительно переворота по отноше-

нию к плоскости потока (в введённых координатах эта симметрия означает замену $z \rightarrow -z$), тогда как в режиме прецессирования эта симметрия отсутствует, а главная ось везикулы направлена под острым углом к оси z . Отметим здесь, что внешнее воздействие, переводящее везикулы из одного режима в другой, изменяло бы эффективную вязкость суспензии. Согласно сказанному, такое внешнее воздействие должно сводиться к установлению или, наоборот, нарушению, симметрии $z \rightarrow -z$.

При нестационарном течении суспензии везикул могут возникнуть новые качественные эффекты, связанные с тем, что мгновенная вязкость суспензии везикул зависит не только от текущего градиента поля скорости, но и от значения поля скорости в предшествующие моменты времени. Этот вопрос может стать темой дальнейших исследований. В связи с этим отметим, что выражения (2.4) могут быть использованы для расчёта вязкости суспензии на конечных частотах.

Перечисленные в Заключение 2.4 качественные эффекты свидетельствуют о том, что суспензия везикул, в отличие от суспензии твёрдых шариков, не может рассматриваться как ньютоновская жидкость.

Образование “морщинок” на везикуле, помещённой во внешний переменный поток

Недавние эксперименты Канцлера и др. [36] показали, что релаксация везикулы во внешнем растягивающем потоке сопровождается формированием морщинок на мембране, т.е. деформаций на поверхности везикулы с длиной волны, много меньшей размера везикулы. Мы предлагаем теорию, описывающую динамику морщинок на мембране. Образование морщинок происходит из-за развития неустойчивостей на мембране, которые возникают вследствие того, что во время релаксации везикулы поверхностное натяжение мембраны принимает отрицательные значения. Полное аналитическое исследование мы проводим в пределе квази-сферических везикул. По силе внешнего течения мы определяем порог, после которого происходит развитие неустойчивостей на мембране, и выделяем три стадии развития морщинок. Мы находим степенные законы эволюции характерной длины волны морщинок во времени. Полученные аналитические результаты мы подтверждаем численным моделированием.

3.1. Неустойчивости формы мембран

Полезно проанализировать устойчивость плоской мембраны при заданном поверхностном натяжении σ перед тем, как переходить к изучению замкнутой мембраны с фиксированной площадью. Малое возмущение плоской мембраны может быть описано функцией $z = h(x, y)$, которая может быть разложена по Фурье-гармоникам, $h(\mathbf{r}) = \sum h_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Квадратичная часть энергии (1.22) имеет сле-

дующий вид:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (\kappa k^4 + \sigma k^2) |h_{\mathbf{k}}|^2. \quad (3.1)$$

Для положительного поверхностного натяжения σ функция F достигает своего минимума при $h = 0$. Таким образом, в случае $\sigma > 0$ плоская форма мембраны является устойчивой. Если же поверхностное натяжение отрицательно, т.е. внешние силы пытаются сжать мембрану, моды $h_{\mathbf{k}}$ с $k < \sqrt{|\sigma|/\kappa}$ становятся неустойчивыми. Ниже мы показываем, что эта неустойчивость и является причиной возникновения морщинок в эксперименте [36].

3.2. Уравнение, описывающее динамику везикулы в переменном внешнем потоке

Возьмём внешний растягивающий поток плоским, какой он был в эксперименте [36]. Определим систему координат, связанную с этим потоком, определённую в Пункте 1.4. В обозначениях Пункта 1.4 растягивающийся поток характеризуется силой s , при этом ненулевые матричные элементы градиента скорости внешнего течения есть $\partial_x V^y = \partial_y V^x = s$. В исследуемой здесь задаче про морщинки относительная сила внешнего потока характеризуется безразмерным параметром

$$\tilde{S} = \frac{16\sqrt{6\pi}}{11\sqrt{5}} \frac{\tilde{\tau} s}{\sqrt{\Delta}}. \quad (3.2)$$

В (3.3) мы ввели характерное время релаксации высших гармоник $\tilde{\tau} = \eta R^3/\kappa$. Мы полагаем, что в момент времени $t = 0$ внешний поток меняет свой знак с положительного на отрицательный, так что функция времени $\tilde{S}(t) = -|\tilde{S}| \text{sign}(t)$.

Для того, чтобы приступить к изучению морщинок на везикуле, параметризуем форму поверхности везикулы в виде (1.17), и перепишем уравнение (2.9) на сферические компоненты функции u в удобных для нас единицах. Поскольку в нашей ситуации оказываются возбуждёнными в том числе и гармоники высших

порядков, то в свободной энергии (1.22) достаточно удерживать только квадратичные члены разложения. Уравнение на функцию смещения u принимает следующий вид:

$$\tilde{\tau} \partial_t U_{lm} = i\tilde{S}(t) f_{lm} - (A_l \Sigma + \Gamma_l) U_{lm} + \tilde{\xi}_{lm}(t), \quad (3.3)$$

где $f_{lm} = \delta_{l,2}(\delta_{m,2} - \delta_{m,-2})$. Численные коэффициенты в (3.3) получены из выражения для кинетического коэффициента (A.46) и квадратичного разложения свободной энергии (1.23):

$$\Gamma_l = \frac{(l-1)l^2(l+1)^2(l+2)}{(2l+1)(2l^2+2l-1)}, \quad A_l = \frac{l(l+1)(l^2+l-2)}{(2l+1)(2l^2+2l-1)}. \quad (3.4)$$

Для простоты мы приняли, что поверхностная вязкость мембраны равна нулю, а вязкость внутренней жидкости равна вязкости внешней жидкости. Эти упрощающие предположения приводят к более компактным выражениям, при этом сохраняя качественный эффект образования морщинок. Коэффициенты U_{lm} связаны с коэффициентами разложения u_{lm} (1.21) согласно равенству

$$U_{lm} = \left[\frac{(l-1)(l+2)}{\Delta} \right]^{1/2} u_{lm}, \quad (3.5)$$

В (3.3) безразмерное поверхностное натяжение, усреднённое по сферическим углам, $\Sigma = \bar{\sigma} R^2 / \kappa$ зависит от времени, подстраиваясь под текущее значение формы везикулы и внешнего течения, обеспечивая сохранение полной площади везикулы. В введённых переменных U_{lm} это условие выглядит как $\sum |U_{lm}|^2 = 2$.

Статистические свойства перемасштабированного шума $\tilde{\xi}_{lm}(t)$ определяются корреляционными функциями (2.10). Здесь мы не выписываем явное выражение для амплитуды шума $\tilde{\xi}$, поскольку в дальнейшем оно нам не понадобится. Дело в том, что при исследовании эволюции везикулы на положительных временах после переключения потока, шумом в уравнении (3.3) можно пренебречь. Тем не менее начальные условия для движения везикулы на временах $t > 0$ для высших гармоник U_{lm} с угловым моментом $l \geq 3$ определяются тепловыми флуктуациями,

подчиняющимся распределению Гиббса. Для самоконтроля мы проверили допустимость этого предположения численным моделированием, которое проводилось с учётом теплового шума.

Стационарная форма везикулы на отрицательных временах до переключения внешнего потока определяется равенством $U_{2,2} = 1$, при этом вся избыточная площадь оказывается аккумулированной в сферической гармонике второго порядка. Поэтому форму везикулы возможно описать в терминах “углов” (1.45), при этом $\Theta = 0$, $\Phi = \pi/4$, см. (1.61). Величина поверхностного натяжения легко находится из (3.3) и оказывается равной

$$\Sigma^- = \frac{\tilde{S} - \Gamma_2}{A_2}. \quad (3.6)$$

Этой величиной определяется амплитуда тепловых флуктуаций поверхности везикулы до момента переключения внешнего потока.

На больших положительных временах везикула переходит в новое положение равновесия, которое отличается от старого поворотом главной оси везикулы на угол $\pi/2$, так что теперь $\Phi = -\pi/4$. Процесс релаксации везикулы во внешнем растягивающем потоке уже кратко кратко обсуждался в Подпункте 1.6.2. В случае малой амплитуда внешнего потока в процессе релаксации высшие гармоники не возбуждаются, и динамика сводится к эволюции угла Φ при сохраняющемся условии $\Theta = 0$, которое приводит к соотношению $U_{2,2} = e^{2i\Phi}$. Из этого соотношения вытекает уравнение на угол Φ :

$$\tilde{\tau} \partial_t \Phi = -\frac{|\tilde{S}|}{2} \cos(2\Phi). \quad (3.7)$$

Начальные условия для угла Φ определяются тепловыми флуктуациями, величина Φ при $t = 0$ оценивается как $\sqrt{T/\Sigma^- \kappa}$. Таким образом, время релаксации угла Φ к его новому стационарному состоянию порядка $(\tilde{\tau}/\tilde{S}) \ln[\kappa/T]$ при умеренных значениях параметра \tilde{S} . В следующем пункте мы найдём порог по \tilde{S} ,

после которого пренебрежение высшими сферическими гармониками в функции u становится некорректным.

3.3. Порог неустойчивости

При больших амплитудах внешнего течения процесс релаксации не описывается уравнением (3.7), поскольку в нём активно участвуют высшие гармоники порядков $l \geq 3$. Для того, чтобы найти порог по силе внешнего потока, после которого возникает неустойчивость высших гармоник, найдём поверхностное натяжение Σ . Его значение определяется из требования сохранения площади Δ , и уравнения (1.40), в котором мы пренебрегаем тепловым шумом:

$$\Sigma = \frac{\tilde{S}(t) \operatorname{Re}[U_{2,2}] - \bar{\Gamma}}{\bar{A}}, \quad (3.8)$$

В (3.8) мы ввели среднее по гармоникам $\bar{A} = \sum_l A_l \Delta_l$ и $\bar{\Gamma} = \sum_l \Gamma_l \Delta_l$, где спектральное распределение избыточной площади везикулы по гармоникам $\Delta_l = \sum_m |U_{lm}|^2$. Из (3.8) и (1.23) следует, что при достаточно больших значениях \tilde{S} на мембране появятся неустойчивости. Действительно, сразу после переключения внешнего потока везикула не успеет поменять свою форму, определяющуюся равенством $U_{2,2} = 1$. Поэтому значение поверхностного натяжения в момент $t = +0$ будет равным

$$\Sigma^+ = - \left(\Gamma_2 + \tilde{S} \right) / A_2. \quad (3.9)$$

Из (1.40) получаем, что гармоника порядка l оказывается неустойчивой если $A_l \sigma + \Gamma_l < 0$, что эквивалентно неравенству $\tilde{S} > \tilde{S}_l = A_2 \Gamma_l / A_l - \Gamma_2$. Асимптотически при больших $l \gg 1$ это неравенство переходит в $\tilde{S}_l \sim A_2 l^2 \gg 1$. Мода, обладающая наибольшим инкрементом роста, определяется максимумом выражения $-\Gamma_l - A_l \Sigma^+$, что даёт

$$l_0 = \sqrt{S/3A_2} \quad (3.10)$$

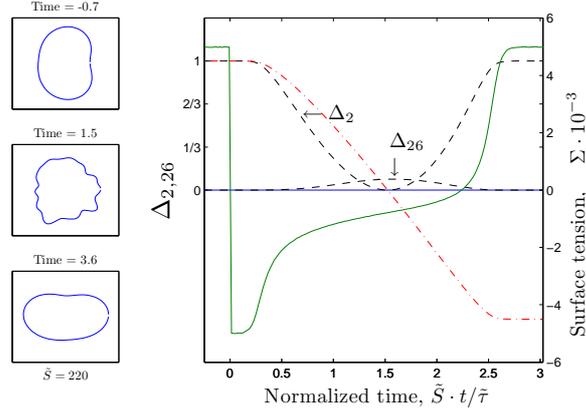


Рис. 3.1. Зависимость от времени Δ_2 , Δ_{26} и Σ , полученная при численном моделировании уравнения (3.3) с $\tilde{S} = 2 \cdot 10^3$ и $T/\kappa\Delta = 10^{-4}$. Мы выбрали Δ_{26} , поскольку она имеет наибольшую амплитуду среди гармоник с $l \geq 3$. Пунктиром с точками изображена зависимость $U_{2,2}$ от времени, сравни с (3.18). Слева: проекция везикулы на плоскость OXY в различные моменты времени.

для сильных течений с $\tilde{S} \gg 1$. Отметим, что третья гармоника становится неустойчивой при $\tilde{S} > \tilde{S}_3 = 1.8$. Эта амплитуда внешнего потока является пороговым значением, после которого уравнение (3.7) становится неприменимым.

3.4. Процесс образования и развития морщинок

Описание динамики везикулы за порогом неустойчивости является значительно более сложной задачей, поскольку в этом случае в движение вовлечены многие степени свободы, нелинейным образом связанные друг с другом. Аналитическое исследование оказывается возможным для случая сильных течений $S \gg 1$. В этом случае можно различить несколько стадий в эволюции морщинок. Формальное решение (1.40) даётся выражением

$$U_{lm}(t) = U_{lm}(0) \exp(-\Gamma_l t / \tau + A_l \rho) \quad (3.11)$$

для высших гармоник с $l \geq 3$, где переменная $\rho = -\int_0^t dt' \Sigma(t') / \tilde{\tau}$. В процессе первой стадии развития морщинок большая часть избыточной площади по прежнему

остаётся запасённой в сферической гармонике второго порядка, а поверхностное натяжение остаётся равным своему значению (3.9) сразу после обращения внешнего потока. Амплитуда нестабильных гармоник с $l \geq 3$ на этом этапе растёт экспоненциально со временем. При этом максимум распределения Δ_l избыточной площади по гармоникам с $l \geq 3$ приходится на гармонику $l = l_0$ (3.10) Начальное значение амплитуд высших гармоник определяется распределением Гиббса на отрицательных временах,

$$\langle |U_{lm,0}|^2 \rangle = \frac{T/\Delta}{l(l+1) + \Sigma^-} \quad (3.12)$$

Можно было бы ожидать, что l_0 определяет характерную длину волны морщинок, которая наблюдается в эксперименте. Однако это не так по следующей причине. Быстрый экспоненциальный рост насыщается, когда суммарная избыточная площадь, запасённая в гармониках высшего порядка, становится достаточно большой, так что вклад этих гармоник в поверхностное натяжение Σ (3.8) становится сравнимым со вкладом от внешнего течения. После этого момента поверхностное натяжение становится функцией времени, убывающей по абсолютному значению.

Обозначим этот момент времени t_1 . При больших l выражение $\Gamma_l \approx l^3/4$, поэтому его среднее по гармоникам оценивается как $\bar{\Gamma} \sim l_0^3 \Delta_{l_0}$. Инкремент роста гармоники номер l_0 порядка $l_0^3/2\tilde{\tau}$, а значение Δ_{l_0} , определяемое тепловыми флуктуациями при $t < 0$ порядка $T/\kappa\Delta_{l_0}$. Учитывая оценку (3.10) для самой быстрорастущей гармоники получаем, что условие $\tilde{S} \text{Re } U_{2,2} \sim \bar{\Gamma}$ приводит к соотношению

$$t_1 \sim \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{S}^{3/2}} \ln(\Delta\kappa/T). \quad (3.13)$$

В дальнейшем мы предполагаем стоящий в правой части (3.13) логарифм большой величиной. Заметим, что длительность первого этапа развития морщинок много меньше характерного времени их существования, которое оценивается как $\tilde{\tau}/\tilde{S}$.

Вторая стадия развития морщинок начинается на временах $t \gtrsim t_1$, после того,

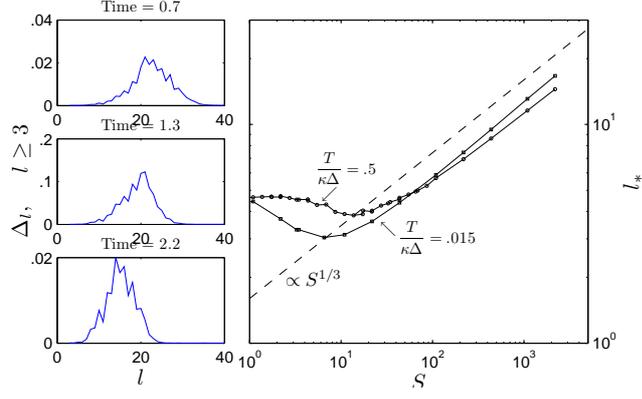


Рис. 3.2. Результат численного моделирования для характерного волнового числа морщинок l_* которое определяется таким же образом, как k_* в [36]. Слева: спектральное распределение Δ_l в различные моменты времени (из численного эксперимента с $\tilde{S} = 10^3$ и $T/\kappa\Delta = .015$).

как экспоненциальный со временем рост морщинок завершился. В течении этой стадии поверхностное натяжение определяется исключительно распределением гармоник U_{lm} высшего порядка с $l \geq 3$. Из (3.8) следует приближённое выражение $\Sigma = -\bar{\Gamma}/\bar{A}$. Распределение избыточной площади Δ_l имеет узкий пик по l с центром в точке $\bar{l} \gg 1$, которая является максимумом для показателя экспоненты (3.11): $\bar{l} = \sqrt{\rho\tau/3t}$. Узость максимума функции Δ_l даёт возможность связать поверхностное натяжение с характерным волновым числом морщинок \bar{l} , $\Sigma = -\bar{l}^2$. Вспоминая определение ρ , приходим к замкнутому уравнению на эту величину:

$$\dot{\rho} = \rho/3t \quad (3.14)$$

Начальным условием для (3.14) является $\Sigma = \Sigma^+$ (3.9) при $t = t_1$. Отсюда находим решение для уравнения (3.14) и вытекающие из него выражением для характерного номера сферической гармоники у морщинок

$$\Sigma = -\frac{\ln^{2/3}(\kappa\Delta/T)}{3} \left(\frac{\tilde{\tau}}{t}\right)^{2/3}, \quad \bar{l} = \frac{\ln^{1/3}(\kappa\Delta/T)}{\sqrt{3}} \left(\frac{\tilde{\tau}}{t}\right)^{1/3} \quad (3.15)$$

Оценим теперь ширину δl распределения Δ_l избыточной площади по сферическим гармоникам, которая при получении (3.14) предполагалась много меньшей

характерного номера сферической гармоники морщинок \bar{l} . Дважды дифференцируя показатель экспоненты в (3.11), получаем, что

$$\delta l/\bar{l} \sim \ln^{-1/2}(\kappa\Delta/T) \ll 1. \quad (3.16)$$

Таким образом, вторая стадия динамики морщинок характеризуется алгебраическим со затуханием поверхностного натяжения и узким спектральным распределением избыточной площади Δ_l , максимум которого смещается в сторону малых l . Физически это смещение соответствует уширению морщинок.

Вторая стадия заканчивается, когда длина морщинок становится на столько малой, что вклад в поверхностное натяжение Σ (3.8) от скорости внешнего потока снова становится сравнимым со вкладом от высших гармоник. Сравнивая два слагаемых в правой части (3.8) получаем, что длительность второй стадии оценивается как τ/\tilde{S} . В конце второй стадии, когда амплитуда морщинок оказывается максимальной, пик распределения Δ_l приходится на

$$l_* \sim S^{1/3}. \quad (3.17)$$

Таким образом, характерная длина волны морщинок, наблюдаемая в эксперименте, должна быть связана с силой внешнего потока законом $\lambda \sim R\tilde{S}^{-1/3}$, где R – радиус везикулы, вместо наивной оценки $R\tilde{S}^{-1/2}$, вытекающей из (3.10).

На второй стадии динамика компоненты второй гармоники $U_{2,2}$ определяется исключительно воздействием внешнего течения, тогда как влияние поверхностного натяжения пренебрежимо мало. Действительно, используя (3.15) получаем, что $\Sigma\bar{l} \ll \tilde{S}$, и поэтому в уравнении (3.3) при проектировании на сферическую гармонику $\mathcal{Y}_{2,2}$ можно пренебречь вторым слагаемым. Таким образом получаем простой закон эволюции второй гармоники,

$$U_{2,2}(t) = 1 - \tilde{S}t/\tilde{\tau}. \quad (3.18)$$

Заметим здесь, что остальные компоненты $U_{l,m}$ в секторе $l = 2$ всё время остаются много меньше единицы.

В течении третьей стадии, которая длится на временах $t \gtrsim \tilde{\tau}/\tilde{S}$, везикула выходит к новому стационарному состоянию. При этом, пока значительная часть избыточной площади остаётся сосредоточенной в морщинках, поверхностное натяжение Σ (3.8) остаётся малым в смысле выполнения неравенства $\Sigma \bar{l} \ll \tilde{S}$. Это означает, что линейное со временем изменение компоненты $U_{2,2}$ (3.18) продолжается вплоть до времени $t_3 \sim 2\tilde{\tau}/\tilde{S}$. Следовательно, максимальная амплитуда морщинок наблюдается в момент окончания второй и начала третьей стадии, т.е. в момент $t_2 = \tilde{\tau}/\tilde{S}$.

Мы проверили результаты нашего аналитического исследования численным моделированием уравнения (3.3). Полное количество гармоник в численном эксперименте было $l_{max} \approx 2\sqrt{\tilde{S}}$. Мы брали различные значения температуры, которая определяет амплитуду шума $\tilde{\xi}_{lm}(t)$ в (1.40). Результаты численного моделирования оказываются слабо чувствительными к температуре при больших $\tilde{S} \gg 1$.

На Рис. 3.1 мы представили результат численного моделирования для некоторого конкретного набора параметров. Отчётливо видны три стадии развития морщинок. Поведение $U_{2,2}$ очень близко к линейному закону (3.18). Кривая $\Sigma(t)$ на второй стадии эволюции морщинок хорошо приближается законом (3.15).

На Рис. 3.2 мы изобразили поведение характерной обратной длины волны морщинок l_* (вычисленной тем же методом, что применялся в [36] при вычислении k_*) как функцию силы внешнего потока \tilde{S} . Наклон асимптотики кривой при $\tilde{S} \gg 1$ подтверждает наше теоретическое предсказание $l_* \propto \tilde{S}^{1/3}$. Этот результат также находится в разумном согласии с результатом экспериментальной работы [36], где был получен наклон $l_* \propto \tilde{S}^{0.25}$. Для слабых течений с $\tilde{S} \approx 1 \div 10$ значение l_* определяется тепловыми флуктуациями и согласно численному счёту в этом диапазоне \tilde{S} обратная длина волны $l_* \approx 5$, что близко к измеренному значению в [36]. Заметим, что среднее волновое число динамически возбуждаемых морщинок превосходит значение, дающееся тепловыми флуктуациями, при амплитуде

внешнего потока $S = S_c$, которая значительно превышает полученное пороговое значение S_3 . Значение S_c на Рис. 3.2 совпадёт с экспериментально полученным порогом $S_c \approx 18$, если действительное значение изгибного модуля мембраны κ принять $\kappa \approx 1.8 \cdot 10^{-13}$ эрг, т.е. примерно в 6 раз меньше значения, использованного при анализе экспериментальных данных в работе [36]. Отметим также тот факт, что поведение l_* не является монотонным по \tilde{S} . Для этой зависимости существует минимум при $\tilde{S} \approx 10 \div 30$. В этом диапазоне \tilde{S} третья и четвёртая угловые гармоники оказываются более всех возбуждёнными среди гармоник с $l \geq 3$. Поэтому они определяют l_* . Глубина минимума зависит от температуры, который почти полностью исчезает, когда $T/(\kappa\Delta) \approx 1$.

3.5. Заключение

В заключение обратим внимание на то, что динамика морщинок на второй стадии не зависит от внешних условий, которыми в нашем случае является внешнее течение. Это означает, что найденный закон (3.15) имеет универсальное значение и применим для тех процессов, в которых по каким-либо причинам на поверхности мембраны оказались возбуждёнными коротковолновые моды, а поверхностное натяжение перестаёт зависеть от внешних условий. Отметим также, что, строго говоря, наше разложение по малому Δ работает не в пределе $\Delta \ll 1$, а требует более сильного условия. Это условие определяется из требования малости наклона поверхности везикулы по отношению к невозмущенной сфере радиуса R . Учитывая то, что характерная длина волны морщинок определяется номером сферической гармоники l_* (3.17), приходим к тому, что необходимым неравенством является $\Delta \tilde{S}^{2/3} \ll 1$. В [36] последнее, более сильное условие, не выполнялось. Этим, в частности, может объясняться расхождение в скейлинговом показателе, представленном в (3.17) и полученном в работе [36].

Заключение

Перечислим основные результаты работы.

1. Исследовано поведение отдельной везикулы во внешнем стационарном поле скорости. Найден закон движения поверхности везикулы в зависимости от параметров везикулы, таких как вязкость внутренней жидкости, поверхностная вязкость мембраны, степень отклонения формы везикулы от сферической, изгибный модуль упругости мембраны, а также в зависимости от характеристик внешнего потока скорости. Мы подробно исследовали случай плоского внешнего течения, как один из наиболее интересных с точки зрения эксперимента. Установлено, что динамический режим, в котором находится везикула в случае плоского внешнего течения, определяется двумя безразмерными параметрами, названными нами S и Λ . Эти безразмерные параметры являются комбинациями вышеперечисленных физических параметров везикулы. Нами показано, что квази-сферические везикулы могут находиться в одном из четырёх динамических режимов в зависимости от значения параметров S , Λ : режиме параллельного переноса, когда форма везикулы остаётся постоянной, режиме покачивания, когда угол между главной осью везикулы и направлением внешнего потока колеблется в ограниченных пределах, в режиме кувыркания, когда этот угол претерпевает полные обороты, и, наконец, в режиме прецессирования, когда главная ось везикулы выведена из плоскости потока и испытывает колебания вблизи оси, нормальной к плоскости потока. Первые три режима обнаружены экспериментально [12] и частично исследованы теоретически [14], режим прецессирования исследован нами впервые.

2. На основании полученных результатов о движении везикулы во внешнем плоском постоянном поле скорости рассчитаны реологические свойства разбавленной взвеси везикул. Установлено, что реологические свойства взвеси везикул отличаются от свойств ньютоновской жидкости. Степень отклонения определяется степенью несферичности везикул. Получена зависимость эффективной вязкости суспензии от геометрических характеристик поля скорости в пределе сильных течений, разрушающих стационарную форму везикулы, а также от физических параметров везикул. В частности установлено, что эффективная вязкость суспензии может зависеть от её начального состояния. Проанализировано влияние тепловых флуктуаций на реологические свойства суспензии.

3. Исследовано поведение везикулы во внешнем сильном скачкообразно изменяющемся потоке скорости. Из эксперимента известно [36], что в таких условиях на везикуле образуются динамические структуры, называемые морщинами. Нами исследованы статистические свойства этих морщинок. Получен закон изменения их амплитуды и характерной длины волны со временем в пределе, когда избыточная площадь везикулы мала. Найден порог возникновения морщинок по силе внешнего потока. Найдена степенная зависимость характерной длины волны морщинок от времени на универсальной стадии эволюции морщинок. Найдена степенная зависимость характерной длины волны морщинок от силы внешнего потока в момент, когда амплитуда морщинок достигает максимума. Характерная длина волны морщинок в этот момент времени является одной из наиболее интересных величин с точки зрения сравнения с экспериментом.

Основное содержание диссертации изложено в следующих работах:

1. V.V. Lebedev, K.S.Turitsyn, S.S. Vergeles, *Dynamics of nearly spherical vesicles in an external flow*, Phys. Rev. Lett. **99**, 218101, (2007).
2. K.S.Turitsyn, S.S. Vergeles, *Wrinkling of vesicles during transient dynamics in elongational flow*, Phys. Rev. Lett. **100**, 028103, (2008).
3. V.V. Lebedev, K.S.Turitsyn, S.S. Vergeles, *Nearly spherical vesicles in an external flow*, New J. Physics, **10**, 043044 (2008).
4. С.С.Вергелес, *Реологические свойства взвеси везикул*, Письма в ЖЭТФ, **87**, 597 (2008)

Приложение А

Вывод уравнения движения везикулы во внешнем течении

А.1. Криволинейные координаты на поверхности

В этом параграфе мы вводим необходимую часть дифференциальной геометрии для того, чтобы иметь математический аппарат для рассмотрения мембраны как двумерного объекта в трёхмерном пространстве.

Пусть R^i – евклидовы координаты элемента поверхности мембраны в трёхмерном пространстве. Метод задания формы везикулы (1.17) можно интерпретировать как введённую на поверхности везикулы параметризацию переменными $\chi^\alpha = \{\vartheta, \phi\}$: координаты элемента поверхности мембраны в трёхмерном пространстве являются функциями этих двух параметров

$$R^i = R^i(\chi^\alpha). \quad (\text{A.1})$$

Мы используем индексы α, β, \dots , нумеруя параметры ϑ, ϕ .

Введём два касательных к поверхности мембраны вектора

$$R_\alpha^i = \partial_\alpha R^i \equiv \frac{\partial R^i}{\partial \chi^\alpha}, \quad (\text{A.2})$$

и метрический тензор на поверхности мембраны

$$g_{\alpha\beta} = R_\alpha^i R_\beta^i. \quad (\text{A.3})$$

Мы обозначаем через $g^{\alpha\beta}$ тензор, обратный тензору (А.3). Поднятие индекса у некоторого вектора v_α соответствует операции $v^\beta = g^{\beta\alpha} v_\alpha$, опускание индекса – операции $v_\alpha = g_{\alpha\beta} v^\beta$. Здесь и далее по повторяющимся греческим индексам происходит суммирование.

Напомним теперь определение операции ковариантного дифференцирования в криволинейных координатах некоторого контравариантного вектора v^α :

$$\nabla_\alpha^\perp v^\beta = \partial_\alpha v^\beta + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha v^\gamma, \quad \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha = g^{\alpha\delta} \Gamma_{\delta|\gamma\beta}. \quad (\text{A.4})$$

Здесь символ Кристоффеля

$$\Gamma_{\gamma|\alpha\beta} = R_\gamma^i \partial_\alpha \partial_\beta R^i \quad (\text{A.5})$$

Тензор кривизны определяется следующим образом

$$h_{\alpha\beta} = \ell^i \partial_\alpha \partial_\beta R^i \quad (\text{A.6})$$

Локальные радиусы кривизны мембраны $R_{1,2}$ являются собственными значениями матрицы $\|h_{\alpha\beta}\|$, взятыми с обратными знаками. Таким образом, средняя кривизна $H = (1/R_1 + 1/R_2)$ и гауссова кривизна $K = 1/R_1 R_2$ равны

$$H = -g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = -\delta_{ik}^\perp \partial_k \ell_j = \partial_i \ell_i, \quad (\text{A.7})$$

$$K = \det(g^{\alpha\gamma} h_{\gamma\beta}) = (\partial_i \ell_k)(\partial_k \ell_i) - (\partial_i \ell_i)^2.$$

Последнее равенство в (A.7) написано в предположении, что единичный вектор ℓ продолжен (произвольным образом с сохранением нормировки на единицу) в трёхмерное пространство. Знак $h_{\alpha\beta}$ зависит от направления единичного вектора ℓ^i . Поясним здесь сделанный выбор знаков. Пусть везикула имеет точно сферическую форму. Вследствие нашего выбора направления вектора ℓ наружу сферы, средняя кривизна H положительна.

Перепишем теперь выражения для сил (1.11,1.12,1.13): каждую силу разделим на нормальную и тангенциальную составляющую. Нормальную составляющую будем отмечать индексом ' ℓ ', а тангенциальную составляющую запишем в криволинейных координатах:

$$f_\ell^{(\kappa)} = \kappa [H (H^2/2 - 2K) + \Delta^\perp H], \quad (\text{A.8})$$

$$f_\ell^{(\sigma)} = -H\sigma, \quad f_\alpha^{(\sigma)} = \nabla_\alpha^\perp \sigma, \quad (\text{A.9})$$

$$f_\ell^{(v)} = -\zeta h^{\alpha\beta} \mathbb{S}_{\alpha\beta}, \quad f_\alpha^{(v)} = -\zeta g^{\gamma\beta} \nabla_\gamma^\perp \mathbb{S}_{\alpha\beta} \quad (\text{A.10})$$

где $\mathbb{S}_{ij} = \partial_i v^j + \partial_j v^i$ – удвоенная симметричная часть градиента скорости. Теперь перепишем динамические граничные условия (1.14,1.15) в криволинейных координатах:

$$-\zeta h^{\alpha\beta} \mathbb{S}_{\alpha\beta} + H\sigma - \kappa [H(H^2/2 - 2K) + \Delta^\perp H] = P_{\text{in}} - P_{\text{out}}, \quad (\text{A.11})$$

$$-\partial_\alpha \sigma - \zeta g^{\gamma\beta} \nabla_\gamma^\perp \mathbb{S}_{\alpha\beta} = \tilde{\eta} (\mathbb{S}_{l\alpha})_{\text{in}} - \eta (\mathbb{S}_{l\alpha})_{\text{out}} \quad (\text{A.12})$$

A.1.1. Вспомогательная поверхность – сфера

Поле скорости внутри и снаружи несферической везикулы оказывается неудобным задавать непосредственно через граничные условия на поверхности везикулы. Полезно ввести сферу радиуса R , который связан с объёмом везикулы равенством (1.1), параметризованную теми же сферическими углами в качестве вспомогательной поверхности. Каждая точка мембраны соответствует точке на этой сфере, задающейся теми же значениями сферических углов. Для введённой сферы определим криволинейную систему координат также, как это было сделано для поверхности везикулы в Подпункте А.1. Введённая промежуточная сфера удобна тем, что, с одной стороны, она имеет простую форму, а с другой стороны отличается от истинной формы везикулы на малую величину порядка $\sqrt{\Delta}$. Для того, чтобы различать векторные величины и уравнения, определённые на промежуточной сфере и на поверхности мембраны, мы будем писать индексы ‘s’ или ‘m’ соответственно после вертикальной линии.

Использовать промежуточную сферу мы будем следующим образом. Предположим, что мы интересуемся некоторой величиной, определённой во всём объёме, и нам нужно вычислить её значение на поверхности мембраны. Это значение может быть найдено по значению этой величины и её пространственных производных на промежуточной сфере. Такой пересчёт, учитывающий несовпадение двух поверхностей и систем координат, связанных с ними, нужно производить не точно, а учитывая только необходимые поправки по малому параметру Δ .

Для промежуточной сферы мы вводим ещё один объект – “косую” производную:

$$\nabla_{\alpha}^* = g_{\alpha\beta} \frac{\epsilon^{\beta\gamma}}{\sqrt{\det g}} \nabla_{\gamma}^{\perp} \Big|_s, \quad (\text{A.13})$$

где $\epsilon^{\beta\gamma}$ есть единичный антисимметричный символ, $\epsilon^{12} = 1$. Мы также будем обозначать оператор Бельтрами-Лапласа на поверхности сферы как $\hat{\mathcal{O}}/R^2$, так что $\hat{\mathcal{O}}$ есть оператор Бельтрами-Лапласа на сфере единичного радиуса.

А.2. Решение Ламба

Мы параметризуем поле скорости внутри и возмущённую часть скорости

$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{V}, \quad (\text{A.14})$$

снаружи функциями

$$X^{\text{in}}, Y^{\text{in}}, Z^{\text{in}} \quad \text{and} \quad X^{\text{out}}, Y^{\text{out}}, Z^{\text{out}} \quad (\text{A.15})$$

соответственно. Функции (A.15) являются функциями от сферических углов ϑ, ϕ . Смысл введённых функций (A.15) следующий. На поверхности сферы радиуса R поле скорости удовлетворяет уравнениям

$$v^r = X^{\text{in}}, \quad R \partial_r v^r = Y^{\text{in}}, \quad R w^r = Z^{\text{in}}, \quad (\text{A.16})$$

где \mathbf{w} есть завихренность, $\mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{v}$. Процедура нахождения поля скорости во всём объёме по введённым функциям была найдена Ламбом [66]. Мы раскладываем каждую функцию (A.15) в ряд по сферическим гармоникам: например,

$$X^{\text{in}} = \sum_{l \geq 0, m} X^{\text{in}, l, m}, \quad (\text{A.17})$$

где m пробегает $2l+1$ значений. Предполагая, что поле скорости является регулярной функцией внутри сферы, получаем стационарное решение (1.4) в следующем

виде

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Pi + \text{rot}[\mathbf{r}\varpi_1] + \text{rot rot}[\mathbf{r}\varpi_2] \quad (\text{A.18})$$

где

$$\Pi = \sum_l \frac{r^l}{R^{l-1}} \frac{(l+1)X^{\text{in},l} - Y^{\text{in},l}}{2l} \quad (\text{A.19})$$

$$\varpi_1 = - \sum_l \frac{r^l}{R^l} \frac{Z^{\text{in},l}}{l(l+1)} \quad (\text{A.20})$$

$$\varpi_2 = \sum_l \frac{r^{l+2}}{R^{l+1}} \frac{Y^{\text{in},l} - (l-1)X^{\text{in},l}}{2l(l+1)}. \quad (\text{A.21})$$

В (A.19-A.21) подразумевается также суммирование по m , которое мы опустили для краткости. Давление

$$P = \tilde{\eta} \sum_l \frac{r^l}{R^{l+1}} \frac{(2l+3)(Y^{\text{in},l} - (l-1)X^{\text{in},l})}{l}$$

индуцируется только частью скорости, возникающей из третьего вклада в (A.18).

Получим теперь необходимые производные скорости из решения Ламба через функции (A.15). Эти производные скорости возникают при разложении граничных условий в ряд по малому параметру Δ , и поэтому понадобятся нам для вывода уравнения движения поверхности везикулы. Мы используем следующие обозначения. Пусть некоторая величина g является функцией сферических углов θ , φ и $K(l)$ является некоторой функцией номера сферической гармоники l . Мы вводим линейный оператор \hat{K}^+ следующим образом

$$\hat{K}^+ g = \sum_{l>1,m} K(l) g_{l,m}. \quad (\text{A.22})$$

Мы также вводим линейный оператор \hat{K}^- , который может быть получен из (A.22) заменой $l \rightarrow -(l+1)$. Нам понадобится давление, скорость и некоторые компоненты удвоенной симметричной части градиента скорости $S_{ij} = \partial_i v^j + \partial_j v^i$ на сфере

радиуса R . Здесь мы выписываем все величины на внутренней стороне сферы, опуская индекс ‘*in*’. Величины на внешней стороне сферы могут быть получены заменой $l \rightarrow -l - 1$ и использование функций из набора (A.15) с индексом *out*.

Давление внутри

$$P|_s = R \tilde{\eta} [\hat{\mathbb{K}}^{px+} X + \hat{\mathbb{K}}^{py+} Y] \Big|_s, \quad (\text{A.23})$$

где

$$\mathbb{K}^{px}(l) = -\frac{(l-1)(2l+3)}{l}, \quad \mathbb{K}^{py}(l) = \frac{2l+3}{l}. \quad (\text{A.24})$$

Скорость

$$v_\alpha|_s = \left[-\nabla_\alpha^\perp \hat{\mathcal{O}}^{-1}(2X + Y) - \nabla_\alpha^* \hat{\mathcal{O}}^{-1} Z \right] \Big|_s. \quad (\text{A.25})$$

Тангенциально-радиальная компонента величины $\hat{\mathbb{S}}$ есть

$$\mathbb{S}_{r\alpha}|_s = \left\{ \nabla_\alpha^\perp \left[\hat{\mathbb{K}}_{r\tau}^{sx+} X + \hat{\mathbb{K}}_{r\tau}^{sy+} Y \right] - \nabla_\alpha^* \hat{\mathbb{K}}_{r\tau}^{sz+} Z \right\} \Big|_s. \quad (\text{A.26})$$

В (A.26) необходимые для нас коэффициенты $\hat{\mathbb{K}}$ равны

$$\mathbb{K}_{r\tau}^{sx}(l) = \frac{l-1}{l(l+1)}, \quad \mathbb{K}_{r\tau}^{sy}(l) = \frac{2l+1}{l(l+1)}. \quad (\text{A.27})$$

Тангенциально-тангенциальные компоненты $\hat{\mathbb{S}}$ равны

$$\mathbb{S}_{\alpha\beta}|_s = \left\{ 2X g_{\alpha\beta} - \left[\hat{\mathcal{O}}^{-1} [4X + 2Y] \right]_{;\alpha\beta} - \left[\nabla_\alpha^* \nabla_\beta^\perp + \nabla_\beta^* \nabla_\alpha^\perp \right] \left[\hat{\mathcal{O}}^{-1} Z \right] \right\} \Big|_s. \quad (\text{A.28})$$

В интересном для нас случае $Y = Z = 0$ получаем из (A.28)

$$g^{\beta\gamma} \nabla_\gamma^\perp \mathbb{S}_{\alpha\beta} \Big|_s = -2 \nabla_\alpha^\perp \left[1 + 2 \hat{\mathcal{O}}^{-1} \right] X \Big|_s \quad (\text{A.29})$$

а также

$$h^{\alpha\beta} \mathbb{S}_{\alpha\beta} \Big|_s = 0. \quad (\text{A.30})$$

Радиальная производная

$$\partial_r \mathbb{S}_{rr} = 2 \partial_r^2 v^r = \hat{\mathbb{K}}_{rrr}^{sx+} X + \dots, \quad \mathbb{K}_{rrr}^{sx}(l) = 2(1 - l^2). \quad (\text{A.31})$$

В (A.31) мы сохранили только необходимое нам слагаемое, зависящее от X .

А.3. Получение уравнения движения в главном приближении по малому параметру $\sqrt{\Delta}$.

В этом Подпункте мы возвращаемся к выводу временного уравнения на функцию u . У нас есть семь неизвестных функций, которые зависят от сферических углов ϑ, ϕ . А именно, шесть функций (А.15) и поверхностное натяжение σ . Для того, чтобы найти эти функции, нужно потребовать выполнение граничных условий на мембране. Три граничных условия возникают из требования непрерывности поля скорости на поверхности мембраны. Нам будет удобным использовать три эквивалентные условия: непрерывность нормальной компоненты поля скорости $\ell^i v^i$, нормальной производной нормальной компоненты скорости $\ell^i \ell^k \partial_k v^i$ и нормальной компоненты завихренности $\ell^k \omega^k$. Например, условие непрерывности нормальной компоненты скорости выглядит как

$$[\ell^i v^i]^{\text{out}} \Big|_{\text{m}} = [\ell^i v^i]^{\text{in}} \Big|_{\text{m}} \quad (\text{А.32})$$

Другие три условия возникают из непрерывности трёх компонент потока импульса (1.14,1.15). Седьмым условием является несжимаемость поверхностного течения мембраны, см (1.6). После того, как перечисленные семь неизвестных функций оказываются найденными или исключёнными, становится возможным связать производную функции u по времени с найденной скоростью жидкости через (1.20), получив таким образом искомое уравнение. В этом Подпункте мы полагаем $\kappa = 0$, и не учитываем влияние изгибных сил, возникающих на поверхности мембраны.

Для того, чтобы получить уравнение движения с точностью до n -го порядка по $\sqrt{\Delta}$, нужно потребовать выполнение всех граничных условий с соответствующей точностью. Оказывается удобным находить очередную поправку по малому параметру $\sqrt{\Delta}$ по рекурсии. В соответствии с такой рекурсивной схемой мы представляем каждую величину (А.15), например, X^{in} , в виде ряда Тейлора по

параметру $\sqrt{\Delta}$

$$X^{\text{in}} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{\text{in}}. \quad (\text{A.33})$$

Мы разбиваем поверхностное натяжение на две части,

$$\sigma = \bar{\sigma} + \tilde{\sigma}, \quad (\text{A.34})$$

где $\bar{\sigma}$ не зависит от углов ϑ, ϕ , а среднее значение $\tilde{\sigma}$ по телесному углу равно нулю. Причиной разбиения является различная зависимость частей $\bar{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}$ от Δ : при слабом отклонении поверхности везикулы от сферической однородная часть поверхностного натяжения стремится к бесконечности, $\bar{\sigma} \sim 1/\sqrt{\Delta}$, тогда как переменная часть поверхностного натяжения $\tilde{\sigma}$ стремится к постоянному значению.

Условие непрерывности нормальной компоненты скорости $\ell^i v^i$ на поверхности мембраны записывается в виде

$$X_0^{\text{in}} = X_0^{\text{out}} + R s_{ij} n^i n^j, \quad (\text{A.35})$$

где \hat{s} есть симметричная часть градиента внешнего течения, см. (1.5), а единичный вектор \mathbf{n} направлен вдоль радиус-вектора, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Непрерывность нормальной производной нормальной компоненты скорости $\ell^i \ell^k \partial_k v^i$ приводит к связи

$$Y_0^{\text{in}} = Y_0^{\text{out}} + R s_{ij} n^i n^j. \quad (\text{A.36})$$

Для выполнения условия непрерывности нормальной компоненты завихренности нужно потребовать

$$Z_0^{\text{in}} = Z_0^{\text{out}} - 2R \omega^i n^i, \quad (\text{A.37})$$

где скорость вращения внешнего течения $\boldsymbol{\omega}$ введена в (1.5). Условие несжимаемости поверхностного течения приводит к уравнениям

$$Y_0^{\text{in}} = 0, \quad Y_0^{\text{out}} = -R s_{ij} n^i n^j. \quad (\text{A.38})$$

Учтя (A.35) получаем, что связь между скоростью и скоростью изменения формы везикулой даёт

$$X_0^{\text{in}} = R\dot{u}, \quad X_0^{\text{out}} = R\dot{u} - R s_{ij} n^i n^j \quad (\text{A.39})$$

Для того, чтобы записать динамические граничные условия (A.11, A.12), нужно прежде написать разложение средней кривизны H по степеням $\sqrt{\Delta}$:

$$H_0 = \frac{2}{R}, \quad H_1 = -\frac{(2 + \hat{O})u}{R}. \quad (\text{A.40})$$

Теперь мы наконец определили все величины, необходимые для записи (A.11, A.12) в главном приближении по малому параметру $\sqrt{\Delta}$. Воспользуемся возможностью разложения скорости (1.16). Вклад в скорость $\mathbf{v}^{(\omega)}$ легко записывается в точном виде, см. левую часть (1.37). Вращательное движение не изменяет форму везикулы, поэтому не возбуждает поверхностное натяжение. Поверхностное натяжение есть линейная сумма возбуждения от воздействия растяжения внешнего потока, характеризующегося матрицей s_{ij} , и возбуждения от действия изгибных сил мембраны. Найдём вклад в скорость изменения формы мембраны, соответствующий части $\mathbf{v}^{(s)}$.

$$-\zeta h^{\alpha\beta} {}_0\mathbb{S}_{\alpha\beta}|_s + \bar{\sigma} H_1 + \tilde{\sigma} H_0 = (P_0|_s)_{\text{in}} - (P_0|_s)_{\text{out}}, \quad (\text{A.41})$$

$$\zeta g^{\beta\gamma} \nabla_\gamma^\perp {}_0\mathbb{S}_{\alpha\beta}|_s + \nabla_\alpha^\perp \tilde{\sigma} = \tilde{\eta} ({}_0\mathbb{S}_{r\alpha}|_s)_{\text{in}} - \eta ({}_0\mathbb{S}_{r\alpha}|_s)_{\text{out}}. \quad (\text{A.42})$$

Индекс ‘0’ слева у тензора $\hat{\mathbb{S}}$ и у давления P справа означает, что в этих величинах учтён только вклад от первых членов ряда для функций X, Y, Z , см. (A.33). Значения первых слагаемых в (A.41) и (A.42) должны быть взяты из (A.30) и (A.29) соответственно; значения правых частей (A.41, A.42) – из (A.23) и (A.26). При этом нужно помнить, что тензор $\hat{\mathbb{S}}$ на внешней стороне мембраны складывается из двух частей, происходящих от поля скорости внешнего течения \mathbf{V} и возмущенной части потока $\delta\mathbf{v}$, см. (A.14). В нашем приближении

$$Z_0^{\text{out}} = 0, \quad (\text{A.43})$$

это равенство удобно получить, беря дивергенцию “косой” производной (A.13) Ур. (A.42). Теперь возьмём простую дивергенцию Ур. (A.42):

$$\frac{1}{\eta R^2} \bar{\sigma}_0 = \left\{ \frac{2\zeta}{R} (1 + 2\mathcal{O}^{-1}) + \tilde{\eta} \hat{\mathbb{K}}_{r\tau}^{sx+} - \eta \hat{\mathbb{K}}_{r\tau}^{sx-} \right\} \dot{u} - \frac{5}{2} s^{ij} n^i n^j. \quad (\text{A.44})$$

Подставив (A.44) в (A.41), наконец получаем уравнение:

$$\hat{a} \dot{u} = \frac{\bar{\sigma}}{\eta R^2} (\hat{\mathcal{O}} + 2) u + 10 s^{ij} n^i n^j, \quad (\text{A.45})$$

$$\hat{a} = 2 \left[\frac{\tilde{\eta}}{\eta} \hat{\mathbb{K}}_{r\tau}^{sx+} - \hat{\mathbb{K}}_{r\tau}^{sx-} \right] - \left[\frac{\tilde{\eta}}{\eta} \hat{\mathbb{K}}^{px+} - \hat{\mathbb{K}}^{px-} \right] + \frac{4\zeta}{R\eta} (1 + 2\mathcal{O}^{-1}), \quad (\text{A.46})$$

$$a_l = \frac{2l^3+3l^2+4}{l(l+1)} + \frac{2l^3+3l^2-5}{l(l+1)} \frac{\tilde{\eta}}{\eta} + \frac{l^2+l-2}{l(l+1)} \frac{4\zeta}{\eta R}.$$

Поверхностное натяжение $\bar{\sigma}$ должно быть найдено из условия сохранения полной площади в главном приближении, $\Delta_2(u) = 0$.

Найдём теперь вклад в скорость изменения формы везикулы, связанный с частью скорости $\mathbf{v}^{(\kappa)}$ в (1.16). Подведя баланс сил на мембране, мы получим те же уравнения (A.41, A.42), но с заменой

$$\bar{\sigma} H_1 \rightarrow \frac{1}{R^3} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u}, \quad (\text{A.47})$$

где свободная энергия даётся равенством (1.22). В итоге вместо (A.45) получаем уравнение

$$\hat{a} \dot{u} = \frac{1}{\eta R} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \quad (\text{A.48})$$

Для того, чтобы иметь правильный подсчёт вкладов различных порядков по $\sqrt{\Delta}$ в уравнениях (A.41, A.42), в (A.47) надо удерживать только лидирующий неисчезающий порядок по $\sqrt{\Delta}$. В случае, когда возбуждены гармоники с $l > 2$, в (A.47) достаточно удержать первый порядок по u . Как показано в Подпункте 1.3.1, во внешнем постоянном течении, когда оказывается возбуждённой только вторая

гармоника в функции смещения поверхности везикулы u , в правой части (А.47) оказываются лидирующими членами второго порядка по u .

Объединяя оба вклада, (А.45,А.48), при этом соединив оба вклада от поверхностного натяжения $\bar{\sigma}$ в один, и включая вклад от вращательной компоненты внешнего течения, получаем уравнение (1.37).

А.4. Высшие поправки к граничным условиям.

В этом Подпункте мы получаем формулы (2.4). Они следуют из условий несжимаемости и кинематического условия (1.20), записанных в следующем порядке по малому отклонению формы везикулы от сферы u .

Кинематическое условие, правая часть которого разложена до первого порядка по u и записана в криволинейных координатах, выглядит следующим образом:

$$\dot{u} = \frac{1}{R} [v^r|_s + Ru \partial_r \circ v^r|_s] - R \nabla_\alpha^\perp u \circ v^\alpha|_s \quad (\text{А.49})$$

Левый индекс ‘0’ у радиальной компоненты скорости v^r означает, что в разложениях типа (А.33) учтён только первый член. В силу условия несжимаемости мембраны (1.7), записанном в главном порядке по u , второе слагаемое в квадратной скобке в (А.49) равно нулю. Первое слагаемое в силу разложения (А.14) равно $v^r|_s = -s_{ij}n^i n^j + \delta v^r|_s$. В последнем слагаемом тангенциальная скорость вычислим, разделив её на возмущённую и невозмущённую части, $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \delta\mathbf{v}$, на поверхности сферы. Получим:

$$\circ v_\alpha = -\omega \delta_{\alpha\phi} - 2 \nabla_\alpha^\perp \hat{\mathcal{O}}^{-1} \dot{u} \quad (\text{А.50})$$

Первое слагаемое в (А.50) происходит от \mathbf{V} , второе слагаемое происходит от \mathbf{v} , при его получении мы воспользовались (А.25), взяв $\{X, Y, Z\}_0^{\text{out}}$ из (А.25,А.39,А.38) соответственно. Подстановкой (А.50) в (А.49) получаем выражение для величины $\delta v^r|_s$, т.е. первое неравенство в (2.4).

Теперь запишем в первом порядке по u условие несжимаемости $\ell^i \ell^j \partial_i v^j = 0$.

В этом порядке

$$\ell^i n^i \Big|_m = 1, \quad \ell^i R_\alpha^i \Big|_m = -R \nabla_\alpha^\perp u. \quad (\text{A.51})$$

Поэтому с нужной точностью

$$\ell^i \ell^j \partial_i v^j \Big|_m = \partial_r v^r \Big|_s + Ru \partial_r^2 v^r \Big|_s - g^{\alpha\beta} {}_0\mathbb{S}_{r\alpha} \nabla_\alpha^\perp u \Big|_s = 0. \quad (\text{A.52})$$

В (A.52) второе слагаемое возникает при учёте того, что поверхность везикулы смещена относительно поверхности сферы радиуса R , третье слагаемое возникает из-за того, что поверхность везикулы наклонена по отношению к поверхности сферы, что выражается вторым равенством в (A.51). Левый индекс ‘0’ у радиальной компоненты скорости v^r и у удвоенной симметричной части градиента скорости $\hat{\mathbb{S}}$ означает, что в разложениях типа (A.33) учтён только первый член. Используя теперь то, что первое слагаемое в (A.52) $\partial_r v^r \Big|_s = s_{ij} n^i n^j + \partial_r \delta v^r \Big|_s$, выразим из (A.52) $\partial_r \delta v^r \Big|_s$, спроектируем получившееся уравнение на сферическую гармонику второго порядка (воспользовавшись при этом (A.26, A.31)) и получим второе уравнение в (2.4). При вычислении ${}_0v^r \Big|_s$ и ${}_0\mathbb{S}_{r\alpha}$ надо воспользоваться разложением $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \delta\mathbf{v}$, и вычислить $\delta\mathbf{v}$ по функциям $\{X, Y, Z\}_0^{\text{out}}$ из (A.25, A.39, A.38) соответственно.

Отметим, наконец, что формулы (2.4) фактически означают, что мы нашли второй член в разложении (A.33) для X^{out} и Y^{out} .

Приложение Б

Эффективная вязкость суспензии

Для того чтобы дать определение мгновенного значения эффективной вязкости суспензии η_s , мысленно проводятся два эксперимента: с чистой жидкостью и с суспензией. Величины, обозначаемые одной и той же буквой для эксперимента с чистой жидкостью и с суспензией, мы будем снабжать индексом (0) в случае чистой жидкости, а в случае с суспензией будем оставлять без индекса.

Оба эксперимента проводятся в одинаковых условиях. А именно, задаются одинаковыми граничными значениями скорости жидкости: на границе сосуда Γ_0 скорости чистой жидкости \mathbf{V} и суспензии \mathbf{v} равны,

$$V|_{\Gamma_0} = v^i|_{\Gamma_0}. \quad (\text{Б.1})$$

Предполагается, что скорость внутри сосуда в эксперименте с чистой жидкостью линейно зависит от значения скорости на границе сосуда вследствие подавления роли нелинейного члена в уравнении Навье-Стокса. Такое подавление может быть следствием как медленности течения, так и специальной геометрии течения. Здесь мы полагаем, что подавление нелинейного члена происходит вследствие медленности течения, т.е. малости числа Рейнольдса. Отметим, что при течении суспензии скорость жидкости \mathbf{v} может зависеть нелинейным образом от скорости на границе сосуда \mathbf{V} вследствие того, что взвешенные частицы в общем случае являются деформируемыми.

Выразим теперь затрачиваемые мощности $W^{(0)}$ и W (2.1) через поле скоростей жидкости:

$$W = \int_{\Gamma_0} dS^k \Pi^{ki} V^i, \quad W^{(0)} = \int_{\Gamma_0} dS^k \Pi_{(0)}^{ki} V^i, \quad (\text{Б.2})$$

где Π^{ki} есть поток импульса в жидкости,

$$\Pi^{ki} = P \delta^{ik} - \eta_0 (\partial_i v^k + \partial_k v^i). \quad (\text{Б.3})$$

Вектор dS^k направлен внутрь жидкости. При написании выражения для W в (Б.2) мы воспользовались условием (Б.1).

На следующем шаге свяжем мощность W со значением скоростей на поверхности взвешенных частиц. Будем нумеровать частицы индексом μ , а поверхность μ -й частицы обозначим S_μ . Полная поверхность Γ , ограничивающая жидкость, равна

$$\Gamma = \Gamma_0 + \sum_{\mu} S_{\mu}. \quad (\text{Б.4})$$

Напомним здесь теорему взаимности, справедливую для течений, подчиняющихся стационарному уравнению Стокса, т.е. ур. (1.4) без члена с производной по времени. Пусть есть две задачи на течение жидкости, подчиняющейся уравнению Стокса в области, имеющей границу Γ . Каждая задача характеризуется своими граничными условиями, а также значениями скорости и потока импульса $\Pi_{(0)}^{ik}$, \mathbf{V} и Π^{ik}, \mathbf{v} . Нетрудно показать, что из того, что эти величины удовлетворяют уравнению Стокса для несжимаемой жидкости, следует так называемая теорема взаимности:

$$\int_{\Gamma} dS^k (\Pi_{(0)}^{ik} v^k - \Pi^{ik} V^k) = 0. \quad (\text{Б.5})$$

Сделав это отступление, перепишем мощность W в виде

$$W = \int_{\Gamma} dS^k \Pi^{ki} V^i - \int_{\sum_{\mu} S_{\mu}} dS^k \Pi^{ki} V^i. \quad (\text{Б.6})$$

К первому интегралу в (Б.6) можно применить теорему взаимности (Б.5), получив

$$\int_{\Gamma} dS^k \Pi_{(0)}^{ki} v^i = \int_{\Gamma_0} dS^k \Pi_{(0)}^{ki} V^i + \int_{\sum_a S_a} dS^k \Pi_{(0)}^{ki} v^i. \quad (\text{Б.7})$$

Первое слагаемое в (Б.7) есть ничто иное, как мощность $W^{(0)}$, затрачиваемая внешними силами в эксперименте с чистой жидкостью (Б.2). Таким образом, окончательно для мощности W получаем выражение

$$W = W^{(0)} + \sum_a W^a, \quad (\text{Б.8})$$

$$W^a = \int_{S_a} dS^{ik} [\Pi_{(0)}^{ki} v^i - \Pi^{ki} V^i]. \quad (\text{Б.9})$$

Величину W^a в (Б.9) можно назвать мощностью, выделяющейся в суспензии вследствие присутствия в ней a -й частицы. Отметим, что вследствие теоремы взаимности (Б.5) интегрирование в (Б.9) может производиться не обязательно по поверхности тела S_a . Поверхность S_a можно заменить на любую другую поверхность, содержащую в себе a -ю частицу, и не содержащую в себе других частиц. Пользуясь этим обстоятельством и снова тем фактом, что поле скорости вне везикулы удовлетворяет уравнению Стокса, а также тем, что везикула не изменяет своего объёма, получаем, что (Б.9) может быть переписано в виде (2.3).

Литература

- [1] Molecular Cell Biology / H. Lodish, A. Berk, P. Matsudaira et al. — W.H. Freeman, New York, 2003.
- [2] *D.D.Lasic // Nature.* — 1992. — Vol. 355. — P. 279.
- [3] *W.Helfrich // Z.Naturforsch., Teil C.* — 1973. — Vol. 28. — P. 693.
- [4] *U.Seifert // Adv. Phys.* — 1997. — Vol. 46. — P. 13.
- [5] H.-G. Döbereiner, E.Evans, M.Kraus et al. // *Phys.Rev.E.* — 1997. — Vol. 55. — P. 4458.
- [6] K. H. D. Haas, C. Blom, D. E. Van et al. // *Phys. Rev. E.* — 1997. — Vol. 56. — P. 7132.
- [7] N. Shahidzadeh, D. Bonn, O. Aguerre-Chariol, J. Meunier // *Phys.Rev.Lett.* — 1998. — Vol. 81. — P. 4268.
- [8] *Abkarian M., Lartigue C., Viallat A. // Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 88. — P. 068103.
- [9] *Abkarian, Viallat // Biophysical Journal.* — 2005. — Vol. 89. — Pp. 1055–1066.
- [10] M. A. Mader, V. Vitkova, M. Abkarian et al. // *Eur. Phys. J. E.* — 2006. — Vol. 19. — P. 389.
- [11] *V.Kantsler, V.Steinberg // Phys.Rev.Lett.* — 2005. — Vol. 95. — P. 258101.
- [12] *V.Kantsler, V.Steinberg // Phys.Rev.Lett.* — 2006. — Vol. 96. — P. 036001.
- [13] *Keller S. R., Skalak R. // J. Fluid Mech.* — 1982. — Vol. 120. — P. 27.
- [14] *Misbah C. // Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 96. — P. 028104.

- [15] *Noguchi H., Gompper G. // Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98. — P. 128103.
- [16] *M. Kraus, W. Wintz, U. Seifert, R. Lipowsky // Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 77. — P. 3685.
- [17] *Sukumaran S., Seifert U. // Phys. Rev. E.* — 2001. — Vol. 64. — P. 011916.
- [18] *Noguchi H., Takasu M. // Phys. Rev. E.* — 2002. — Vol. 65. — P. 051907.
- [19] *Noguchi H., Gompper G. // Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 93. — P. 258102.
- [20] *Noguchi H., Gompper G. // Journal of Physics Condensed Matter.* — 2005. — Vol. 17. — P. S3439.
- [21] *Noguchi H., Gompper G. // Proc. Nat. Ac. Sci.* — 2005. — Vol. 102. — Pp. 14159–14164.
- [22] *Noguchi H., Gompper G. // Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 72. — P. 011901.
- [23] *Biben T., Misbah C. // Eur. Phys. J B.* — 2002. — Vol. 29. — P. 311.
- [24] *Biben T., Misbah C. // Phys. Rev. E.* — 2003. — Vol. 67. — P. 031908.
- [25] *J. Beaucourt, F. Rioual, T. Seon et al. // Phys. Rev. E.* — 2004. — Vol. 69. — P. 011906.
- [26] *Biben T., Kassner K., Misbah C. // Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 72. — P. 041921.
- [27] *Rioual F., Biben T., Misbah C. // Phys. Rev. E.* — 2004. — Vol. 69. — P. 061914.
- [28] *Vlahovska P. M., Gracia R. S. // Phys. Rev. E.* — 2007. — Vol. 75. — P. 016313.
- [29] *Seifert U. // Eur. Phys. J. B.* — 1999. — Vol. 8. — P. 405.
- [30] *Olla P. // Physica A.* — 2000. — Vol. 278. — Pp. 87–106.

- [31] *Lebedev V. V., Turitsyn K. S., Vergeles S. S. // New J. Physics.* — 2008. — Vol. 10. — P. 043044.
- [32] *Lebedev V. V., Turitsyn K. S., Vergeles S. S. // Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 100. — P. 028103.
- [33] *A.Einstein // Ann.Physik.* — 1911. — Vol. 34. — P. 592.
- [34] *G.I.Taylor // Proc. Roy. Soc. A,.* — 1932. — Vol. 138. — P. 41.
- [35] *C.C.Вергелес // Письма в ЖЭТФ.* — 2008. — Т. 87. — С. 597.
- [36] *V.Kantsler, E.Serge, V.Steinberg // Phys.Rev.Lett.* — 2007. — Vol. 99. — P. 178102.
- [37] *E.Cerda, K.Ravi-Chandar, L.Mahadevan // Nature.* — 2002. — Vol. 419. — P. 579.
- [38] *E.Cerda, L.Mahadevan // Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 90. — P. 074302.
- [39] *et. al. J. S. // Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 97. — P. 098103.
- [40] *A. Walter H. R., Leonhard H. // Colloid Surf. A.* — 2001. — Vol. 183 -185. — P. 123.
- [41] *Finken R., Seifert U. // J. Phys.: Cond. Matt.* — 2006. — Vol. 18. — P. L185.
- [42] *G. Dankera, T. Biben, T. Podgorski et al. // Phys. Rev. E.* — 2007. — Vol. 76. — P. 041905.
- [43] *Meuner J., Langevin D., Boccara N. Physics of Amphiphilic Layers, Springer Proceedings in Physics, 21.* — Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [44] *Safran S. A., Clark N. A. Physics of Complex and Supermolecular Fluids,.* — Wiley, NY, 1987.

- [45] *Nelson D., Pevian T., Weinberg S.* Statistical Mechanics of Membranes and Surfaces,. — World Scientific, NY, 1989.
- [46] *et. al. A.* // *Adv. Colloid Interface Sci.* — 1984. — Vol. 20. — P. 167.
- [47] *G. Porte e. a.* // *Physica A.* — 1991. — Vol. 176. — P. 168.
- [48] *G. Porte e. a.* // *J. Phys. II.* — 1992. — Vol. 8649. — P. 8649.
- [49] *Safran S. A.* Statistical Thermodynamics of Surfaces, Interfaces, and Membranes, Frontiers in Physics, **90**. — **90**.
- [50] *Dimova R., Pouligny B., Dietrich C.* // *Biophys. J.* — 2000. — Vol. 79. — P. 340.
- [51] *Canham P. B.* // *J. Theor. Biol.* — 1970. — Vol. 26. — P. 61.
- [52] *Helfrich W.* // *Z. Naturforsch. A.* — 1973. — Vol. 28c. — P. 693.
- [53] *Evans E.* // *Biophys. J.* — 1974. — Vol. 14. — P. 923.
- [54] *Helfrich W.* // *Z. Naturforsch.* — 1975. — Vol. B103. — P. 67.
- [55] *Jeffery G. B.* // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A.* — 1922. — Vol. **102**, No. 715. — Pp. 161–179.
- [56] *Lebedev V. V., Muratov A. R.* // *ZhETF.* — 1989. — Vol. 95. — P. 1751.
- [57] *Kats E. I., Lebedev V. V.* Fluctuational Effects in the Dynamics of Liquid Crystals. — Springer-Verlag, N. Y., 1993.
- [58] *Zong-Can O.-Y., Helfrich W.* // *Phys. Rev. A.* — 1989. — Vol. 39. — P. 5280.
- [59] *F. Juelicher U. S., Lipowsky R.* // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Vol. 71. — P. 452.
- [60] *M. Chertkov, I. Kolokolov, V. Lebedev, K. Turitsyn* // *J. Fluid. Mech.* — 2005. — Vol. 531. — P. 251.

- [61] *Ladyzhenskaya O. A.* The mathematical theory of viscous incompressible flow. — Gordon and Breach, 1987.
- [62] *G.Danker, C.Misbah* // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98. — P. 088104.
- [63] *Дж.Ханпель, Г.Бреннер.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. — МИР, 1976.
- [64] *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.* Теоретическая физика, том VI. Гидродинамика. — Наука, 1986.
- [65] *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.* Теоретическая физика, том V. Статистическая физика, часть 1. — Наука-Физматлит, 1995.
- [66] *Lamb H.* Hydrodynamics, 6th ed. — Cambridge University Press, Cambridge, England, 1932.