Лекция 5

Законы сохранения в общей теории относительности

В прошлой лекции мы отметили, что уравнения Эйнштейна формально означают обращение в нуль суммарного тензора энергии-импульса материи и гравитации (уравнение (4.20)). Это, разумеется, не нарушает законов сохранения энергии, импульса и момента импульса, но делает их бессодержательными: все эти величины для любой области пространства просто равны нулю. Гравитационная (да и любая другая) волна в такой картине не переносит энергии и импульса, а просто передает сигнал родить немного материальной энергии в такой-то точке пространства. Хотелось бы как-то переопределить гравитационную энергию так, чтобы вернуть смысл обычной физической интуиции.

Первым этим вопросом озаботился Эйнштейн. Он предложил вычислять тензор энергии-импульса гравитационного поля по стандартной формуле для канонического тензора энергии-импульса (1.32) в теории поля через усеченный лагранжиан $-\frac{1}{16\pi G}\mathcal{R}$ (см. (4.31)):

$$\sqrt{|g|}{t^E}_\mu{}^\nu = -\frac{1}{16\pi G}\left(g_{\alpha\beta,\mu}\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{R})}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} - \delta^\nu_\mu\sqrt{|g|}\mathcal{R}\right). \tag{5.1}$$

Этот объект не совпадает с тензором энергии-импульса $T^{\mu\nu}_{\text{грав}}$. Более того, он не является тензором. Действительно, величина $\mathcal{R}$ не является скаляром — она зависит от системы координат, и величины $g_{\alpha\beta,\mu}$ не являются компонентами тензора. Величина ${t^E}_\mu{}^\nu$ называется *псевдотензором энергии-импульса Эйнштейна.*

Нетрудно показать, что

$$\left(\sqrt{|g|}({T_\mu}^\nu + {t^E}_\mu{}^\nu)\right)_{,\nu} = 0, \tag{5.2}$$

так что вектор

$$P^E_\mu = \int d^{d-1}x\,\sqrt{|g|}({T_\mu}^0 + {t^E}_\mu{}^0) \tag{5.3}$$

сохраняется: $P^E_{\mu,0} = 0$.

Неинвариантность псевдотензора ${t^E}_\mu{}^\nu$ означает, что понятие энергии и импульса гравитационного поля зависит от системы отсчета. По сути, определение (5.1) привязано к «фоновой» плоской метрике. Покажем, что если массы сосредоточены в конечной области и настоящая метрика $g_{\mu\nu}$ достаточно быстро стремится к плоской на больших расстояниях от этой области, то энергия и импульс такой системы определены однозначно. Действительно, равенство нулю градиента псевдотензора в односвязном пространстве эквивалентно существованию так называемого *суперпотенциала* ${\tau_\mu}^{\nu\lambda}$, такого что

$$\sqrt{|g|}({T_\mu}^\nu + {t^E}_\mu{}^\nu) = \sqrt{|g|}(-(T_{\text{грав}})_\mu{}^\nu + {t^E}_\mu{}^\nu) = \partial_\lambda\tau^{E\nu\lambda}_\mu, \qquad \tau^{E\nu\lambda}_\mu = -\tau^{E\lambda\nu}_\mu. \tag{5.4}$$

Суперпотенциал определен неоднозначно. Его можно найти, например, в виде

$$\tau^{E\nu\lambda}_\mu = |g|^{-1/2}g_{\mu\kappa}\chi^{\kappa\nu\lambda\rho}{}_{,\rho}, \tag{5.5}$$

где

$$\chi^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda} - g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}). \tag{5.6}$$

Отсюда получаем, что вектор импульса равен

$$P^E_\mu = \int dS_\nu\,\partial_\lambda\tau^{E\nu\lambda}_\mu = \frac{1}{2}\oint dS_{\nu\lambda}\,\tau^{E\nu\lambda}_\mu. \tag{5.7}$$

Первый интеграл представляет собой интеграл по пространственно-подобной гиперповерхности, а второй — по ее $(d-2)$-мерной границе. Таким образом, энергия и импульс системы оказываются не зависящими от систем координат вблизи гравитирующих масс, но зависят только от их асимптотик метрики на больших расстояниях, в асимптотически плоской области. В этой области мы можем выбрать стандартные ортогональные координаты, и тогда вектор P^E будет вектором по отношению к преобразованиям Лоренца.

Недостаток псевдотензора энергии-импульса Эйнштейна состоит в том, что он не симметричен, и это не позволяет определить момент импульса и центр инерции системы. Этот недостаток был исправлен Ландау и Лифшицем в работе 1947 года. Они предложили свой псевдотензор энергии-импульса, основываясь на следующем рассуждении. Давайте рассмотрим окрестность точки x в «свободно падающей» системе отсчета, то есть в системе координат, в которой символы Кристоффеля в данной точке обращаются в нуль: $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x) = 0$. Это значит, что первые производные метрики зануляются: $g_{\mu\nu,\lambda}(x) = 0$. В этой системе отсчета гравитационное поле локально (в данной точке) отсутствует, поэтому естественно считать, что в ней энергия и импульс гравитационного поля равны нулю. Псевдотензор энергии-импульса Эйнштейна в этой точке тоже равен нулю. Поэтому

$$|g|T^{\mu\nu}(x) = -|g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}}(x) = \partial_\lambda \tau^{\mu\nu\lambda}(x),$$

где $\tau^{\mu\nu\lambda}$ — *суперпотенциал Ландау—Лифшица*:

$$\tau^{\mu\nu\lambda} = -\tau^{\mu\lambda\nu} = \chi^{\mu\nu\lambda\rho}{}_{,\rho}. \tag{5.8}$$

Здесь мы использовали тот факт, что первые производные метрики в точке x равны нулю, и мы можем вносить и выносить компоненты метрики из-под производной по x^λ. Тогда в произвольной системе координат *псевдотензор энергии-импульса Ландау—Лифшица* определяется равенством

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} + \tau^{\mu\nu\lambda}{}_{,\lambda}. \tag{5.9}$$

Соответственно, на решениях уравнений Эйнштейна имеем

$$|g|(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = \tau^{\mu\nu\lambda}{}_{,\lambda}. \tag{5.10}$$

Очевидно, имеет место закон сохранения

$$\left(|g|(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})\right)_{,\nu} = 0. \tag{5.11}$$

Энергия и импульс системы в конечном объеме даются выражением

$$P^\mu = \int dS_\nu \, |g|(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\oint dS_{\nu\lambda}\, \tau^{\mu\nu\lambda}. \tag{5.12}$$

В бесконечной асимптотически плоской системе они образуют вектор по отношению к (асимптотическим) преобразованиям Лоренца. Не совсем правильно говорить, что энергия и импульс гравитационного поля не локализованы. В конце концов, мы можем их определить в любом конечном объеме и определить их потоки через поверхность. Точнее будет сказать, что локализация энергии и импульса зависит от систем отсчета, выбранных в каждой точке.

Симметричность псевдотензора Ландау—Лифшица позволяет определить сохраняющийся момент импульса

$$J^{\mu\nu} = \int dS_\lambda \, |g| \left(x^\mu (T^{\nu\lambda} + t^{\nu\lambda}) - x^\nu (T^{\mu\lambda} + t^{\mu\lambda}) \right). \tag{5.13}$$

Момент импульса может также быть определен через метрику системы на границе пространственно-подобной поверхности:

$$J^{\mu\nu} = \oint dS_{\alpha\beta}\, (x^\mu \tau^{\nu\alpha\beta} - x^\nu \tau^{\mu\alpha\beta} + \chi^{\mu\alpha\beta\nu}). \tag{5.14}$$

Цент инерции системы в данной системе координат определяется формулой

$$X^i = \frac{\int d^{d-1}x\, |g|(T^{00} + t^{00}) x^i}{\int d^{d-1}x\, |g|(T^{00} + t^{00})} \tag{5.15}$$

В асимптотически плоском пространстве центр инерции движется с постоянной скоростью.

В этой лекции мы всюду предполагали, что на больших расстояниях от гравитирующих масс пространство-время является асимптотически плоским. Из реальной космологии мы знаем, что это не так. В силу относительной равномерности распределения массы во вселенной, а также плохо изученного фактора, называемого темной энергией (вклад которой напоминает вклад космологической постоянной), пространство-время не является асимптотически плоским. В связи с этим изучаются модификации данной конструкции, в которых вместо плоского пространства рассматривается произвольная «фоновая» метрика, а энергия и импульс приписываются только отклонениям геометрии пространства-времени от «фона».

Задачи

1. Покажите, что псевдотензор Эйнштейна, определенный (5.1), выражается через суперпотенциал $\tau_\mu^{E\nu\lambda}$ согласно (5.4).

2. Докажите, что из симметрии псевдотензора энергии-импульса следует закон сохранения момента импульса.

3. Покажите, что в асимптотически плоском пространстве, где метрика ведет себя как $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(r^{3-d})$ вдали от гравитирующих тел (r — пространственное расстояние от источника гравитации), векторы энергии-импульса Эйнштейна и Ландау—Лифшица совпадают.

4. Выведите выражение для момента импульса через интеграл по поверхности (5.14).

5. Покажите, что центр инерции гравитирующей системы (5.15) в асимптотически плоском пространстве движется равномерно и прямолинейно.

Семинар 5

Симметрии и векторные поля Киллинга

Важный вопрос состоит в том, как инвариантным образом описать симметрии метрических пространств, не прибегая к конкретному виду метрики. На этом семинаре мы рассмотрим *векторные поля Киллинга*

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0, \tag{5.16}$$

которые реализуют потоки, отвечающие действию групп симметрии метрических пространств. Мы покажем, что векторные поля Киллинга образуют алгебры Ли. Соответствующие потоки образуют группы Ли. Мы изучим несколько примеров симметрических пространств и векторных полей Киллинга в них:

1) эвклидово пространство и пространство Минковского;

2) сферы и пространства де Си́ттера;

3) стационарные метрики в ОТО;

4) сферически симметричные метрики в ОТО.