

Лекция 9 Решение Шварцшильда

До сих пор мы рассматривали только слабые гравитационные поля, либо предполагая малость тензора-энергии импульса, либо рассматривая систему вдали от источников. Есть большой соблазн думать, что слабое гравитационное поле описывается линейной теорией, подобной электродинамике, однако это *не так*. Получаемая таким способом теория не является математически замкнутой. Это выражается, прежде всего, в том, что возмущение метрики $h_{\mu\nu}$ влияет на измерение расстояний и времени, таким образом, не допускает масштабирования: если мы увеличим масштабы так, чтобы $h_{\mu\nu}$ было бы сравнимо с $\eta_{\mu\nu}$, мы получим абсурдные результаты для движения частиц в поле. Поэтому нам с необходимостью надо рассмотреть сильное поле и понять, к каким эффектам приводит сильная нелинейность. Как мы увидим, неизбежным следствием уравнений поля оказываются сингулярности метрики пространства-времени.

В этой лекции мы построим сферически-симметричное решение уравнений Эйнштейна — *решение Шварцшильда* — в четырехмерном пространстве-времени и изучим движение частиц в таком поле. Формально это решение будет стационарным, то есть компоненты метрики не будут зависеть от времени. Важный результат будет состоять в том, что стационарность этого решения фиктивна и связана с неполнотой выбранной системы координат: она определена только в одной карте и не описывает многообразие целиком.

Что могли бы означать слова «сферически-симметричное решение» в применении к искривленному пространству-времени? В плоском пространстве-времени мы имеем три пространственно-подобных вектора Киллинга

$$J_x = z \partial_y - y \partial_z, \quad J_y = x \partial_z - z \partial_x, \quad J_z = y \partial_x - x \partial_y. \quad (9.1)$$

Эти векторы образуют алгебру $so(3) \simeq su(2)$ с коммутационными соотношениями вида

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=x}^z \epsilon^{ijk} J_k, \quad \epsilon^{xyz} = 1, \quad \epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik} = -\epsilon^{ikj}. \quad (9.2)$$

Эти векторы являются генераторами группы Ли $SO(3)$ вращений в плоском трехмерном пространстве. Сферически-симметричным мы называем любое решение, инвариантное относительно этой группы:

$$\delta_{J_i} \varphi = 0.$$

Для записи сферически-симметричных решений удобно выбрать сферические координаты t, r, ϑ, φ ,

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta, \quad (9.3)$$

причем метрика будет даваться формулой

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (9.4)$$

В этих координатах векторы Киллинга J_i имеют вид

$$J_x = -\cos \varphi \partial_\vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta \sin \varphi \partial_\varphi, \quad J_y = \sin \varphi \partial_\vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta \cos \varphi \partial_\varphi, \quad J_z = -\partial_\varphi. \quad (9.5)$$

Скалярные поля в сферически-симметричном решении должны были бы быть функциями только от r и t .

В искривленном пространстве-времени мы называли бы метрику сферически-симметричной, если бы в ней имелись три векторных поля Киллинга, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (9.2) алгебры Ли $so(3)$. Самый простой способ состоит в том, чтобы «расслоить» пространство-время на двумерные сферы со сферическими координатами на каждой. На двумерных сферах мы выберем координаты ϑ, φ таким образом, чтобы векторы (9.5) были векторами Киллинга. Две остальные координаты мы обозначим через t и r по аналогии с плоским пространством. Немного ниже мы уточним их определение.

Потребуем, прежде всего, чтобы индуцированная метрика на сферах совпадала, с точностью до постоянного множителя, с метрикой на сфере в плоском пространстве:

$$ds^2|_{t,r=\text{const}} = g_{\vartheta\varphi}(t,r)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Этого еще, однако, недостаточно, чтобы векторы (9.5) были векторами Киллинга. Дело в том, что условие (5.16) накладывает на соответствующие ковекторы $\bar{g}(J_i)$, так что необходимо, чтобы эти ковекторы оставались внутри сферы. Иными словами, векторы ∂_t, ∂_r должны быть ортогональны векторам $\partial_\vartheta, \partial_\varphi$: $g_{t\vartheta} = g_{r\vartheta} = g_{t\varphi} = g_{r\varphi} = 0$. Это же условие обеспечивает тот факт, что двумерные символы Кристоффеля на сферах совпадают с соответствующими четырехмерными. Получаем

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{tr} dt dr + g_{rr} dr^2 + g_{\vartheta\vartheta}(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

При этом условии удовлетворяются соотношения

$$J_{i\mu;\nu} + J_{i\nu;\mu} = 0, \quad \mu, \nu = \vartheta, \varphi.$$

Чтобы удовлетворить остальным условиям, надо потребовать, чтобы все четыре функции $g_{tt}, g_{tr}, g_{rr}, g_{\vartheta\vartheta}$ зависели бы только от t и r . Иными словами

$$\partial_\vartheta g_{\mu\nu} = \partial_\varphi g_{\mu\nu} = 0, \quad \mu, \nu = t, r, \vartheta, \varphi. \quad (9.6)$$

Действительно, например, из условия $J_{zr;r} = 0$ находим

$$0 = J_{zr;r} = -\Gamma_{rr}^\varphi J_{z\varphi} = \Gamma_{rr}^\varphi g_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2} g_{rr,\varphi}.$$

Аналогично проверяется ϑ - и φ -независимость остальных компонент.

Заметим теперь, что метрика в факторпространстве $M/SO(3)$, где $SO(3)$ — группа вращений, порожденная векторами Киллинга, есть метрика общего вида. Поэтому преобразованиями координат t, r мы можем зафиксировать две функции. Потребуем, чтобы, во-первых, направления ∂_t и ∂_r были ортогональны, а, во-вторых, определим r условием, чтобы длина окружности на любой из сфер $t, r = \text{const}$ равнялась $2\pi r$. Это значит, что

$$g_{tr} = 0, \quad g_{\vartheta\vartheta} = -r^2.$$

Оставшиеся компоненты метрики g_{tt}, g_{rr} удобно записать в экспоненциальном виде e^{2k}, e^{2h} . Окончательно, запишем сферически-симметричную метрику в виде

$$ds^2 = e^{2k(t,r)} dt^2 - e^{2h(t,r)} dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (9.7)$$

Метрика дается диагональной матрицей, так что обратную метрику легко найти:

$$g^{\bullet\bullet} = e^{-2k(t,r)} \partial_t \otimes \partial_t - e^{-2h(t,r)} \partial_r \otimes \partial_r - r^{-2}(\partial_\vartheta \otimes \partial_\vartheta + \sin^{-2} \vartheta \partial_\varphi \otimes \partial_\varphi). \quad (9.8)$$

Будем точкой обозначать производную по t и штрихом — по r . Имеем для ненулевых символов Кристоффеля

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^t &= \dot{k}, & \Gamma_{rt}^t &= k', & \Gamma_{tt}^r &= k' e^{2k-2h}, \\ \Gamma_{rt}^r &= \dot{h}, & \Gamma_{rr}^t &= \dot{h} e^{2h-2k}, & \Gamma_{rr}^r &= h', \\ \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = r^{-1}, & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -r e^{-2h}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r e^{-2h} \sin^2 \vartheta, \\ \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi &= \text{ctg } \vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin \vartheta \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Отсюда находим ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$\begin{aligned} R_t^t &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2) e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}k') e^{-2h}, \\ R_r^r &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2) e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' - 2r^{-1}h') e^{-2h}, \\ R_r^t &= 2r^{-1} e^{-2k} \dot{h}, \\ R_\vartheta^\vartheta &= R_\varphi^\varphi = -r^{-2}(1 + (rh' - rk' - 1)e^{-2h}), \end{aligned} \quad (9.10)$$

Решим уравнения Эйнштейна в вакууме $R_\nu^\mu = 0$. Из третьего уравнения немедленно имеем $\dot{h} = 0$, то есть $h = h(r)$. В первом и втором уравнениях выпадают все члены с производными по времени,

и мы имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной r . Используя комбинации $R_t^t \mp R_r^r$, получаем

$$\begin{aligned} k' + h' &= 0, \\ k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h') &= 0, \\ r(k' - h') &= e^{2h} - 1. \end{aligned}$$

Из первого уравнения немедленно имеем

$$k(t, r) = F(t) - h(r).$$

Функцию $F(t)$ можно устранить преобразованием координат $t' = \int dt e^{F(t)}$, поэтому без ограничения общности положим ее равной нулю. Имеем

$$h = -k, \quad k'' + 2k'^2 + \frac{2k'}{r} = 0, \quad \frac{2 dk}{e^{-2k} - 1} = \frac{dr}{r}.$$

Третье уравнение легко решается

$$e^{2k} = 1 - \frac{r_g}{r},$$

где константа r_g должна быть положительной, чтобы решение имело смысл на больших расстояниях. Подставляя во второе уравнение, убеждаемся, что оно тоже выполнено.

Итак, окончательно имеем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (9.11)$$

Это решение называется *решением Шварцшильда*, а постоянная r_g — *гравитационным радиусом*. Величину r_g легко выразить через полную энергию (массу) системы. Действительно, асимптотика решения Шварцшильда при $r \rightarrow \infty$ согласуется с асимптотическим решением (6.21) при $A = -2r_g$. Сравнивая с (6.25), получаем

$$r_g = 2GM. \quad (9.12)$$

Из сферической симметрии решения физически ясно, что момент импульса системы, создающей гравитационное поле, равен нулю. Это также строго следует из того, что в асимптотике $\psi_{0i} = 0$.

Важно отметить, что решение Шварцшильда является единственным (с точностью до преобразований координат) сферически-симметричным решением. Это значит, что радиальные движения сферически-симметричной материи, как и в ньютоновской теории, не влияют на гравитационное поле в пустом пространстве снаружи.

Давайте изучим решение (9.11) более внимательно. Если размер гравитирующих тел больше r_g , то решение (9.11) хорошо определено. Чтобы получить полное решение, мы должны сплечь его с решением в области, где $T^{\mu\nu} \neq 0$. В то же время, ничто не может гарантировать, что материя распределена достаточно неплотно. Вполне возможно, что сил отталкивания не хватит, чтобы удержать материю за пределами сферы $r = r_g$, на которой метрика имеет особенность. Более того, может так случиться, что при ненулевом, но небольшом тензоре энергии-импульса особенность просто сдвинется внутрь, но не исчезнет. Поэтому попробуем понять смысл этой особенности. Для этого изучим промежутки времени на прямых $r, \vartheta, \varphi = \text{const}$ и расстояния на плоскостях $t = \text{const}$. Пусть частица неподвижно висит в шварцшильдовых координатах. Пусть $\Delta t = t_2 - t_1$ — некоторый промежуток «глобального» координатного времени. Промежуток физического времени по часам частицы (ее собственного времени) $\Delta\tau$ равен

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \Delta t. \quad (9.13)$$

Эта величина стремится к нулю при $r \rightarrow r_g$. Это означает, что прямая $r = r_g, \vartheta, \varphi = \text{const}$ времениподобна. Ниже мы увидим, что на самом деле эта прямая является в пространстве-времени *единственной точкой*.

Теперь перейдем к измерениям расстояний в пространственных слоях. Так как система координат Шварцшильда является синхронной, пространственная часть метрики полностью определяет

расстояния между точками. Мы немедленно получаем, что расстояния между точками на любой сфере $r = \text{const}$, в том числе и на сфере Шварцшильда $r = r_g$, определяются стандартной метрикой на сфере радиуса r :

$$dl_{\text{сф}}^2 = r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Расстояния же вдоль радиуса растут с приближением к сфере Шварцшильда:

$$dl_{\text{рад}} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} dr.$$

Нетрудно проверить, что расстояние от сферы Шварцшильда до любой близлежащей точки (и, следовательно, до любой вообще точки) конечно. Пусть $r - r_g \ll r_g$. Тогда имеем

$$l_{\text{рад}}(r, r_g) = \int dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} \simeq \sqrt{r_g} \int \frac{dr}{\sqrt{r - r_g}} = 2\sqrt{r_g(r - r_g)}.$$

Это значит, что сфера Шварцшильда не «утолщается» в пространственном направлении.

Итак, сфера Шварцшильда $r = r_g$ является двумерной сферой, то есть *двумерным*, а не трехмерным объектом в пространстве-времени. Область $r < r_g$ вообще не имеет смысла. Мы выяснили характер особенности координат Шварцшильда. Теперь мы покажем, что они не покрывают все физическое пространственно-временное многообразие. Для этого рассмотрим (светоподобные) изотропные кривые в плоскости (t, r) . В силу симметрии системы эти кривые должны быть геодезическими. Полагая $d\vartheta = d\varphi = 0$ и $ds = 0$, получаем

$$dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (9.14)$$

Знак «+» отвечает «фотону», летящему из центра, а знак «-» — «фотону», летящему к центру. Это уравнение нетрудно проинтегрировать, но даже без интегрирования ясно, что будет происходить с фотоном в будущем. Фотон, удаляющийся от центра, постепенно выйдет на асимптотику $r = t$ и уйдет на бесконечность, в то время как «падающий» фотон будет приближаться к радиусу Шварцшильда по закону $r - r_g \sim e^{-t/r_g}$. Казалось бы, мы решили проблему сингулярности. Никакая частица не может обогнать свет и, тем самым, не может пересечь сферу Шварцшильда. Тем самым, массы никогда не достигнут этой сферы и проблема сингулярности просто не возникнет. Это так и не так. Это так, если мы наблюдаем за системой издалека. Действительно, удаленный наблюдатель будет видеть как частицы приближаются к сфере Шварцшильда, образуя вокруг нее тонкий слой, но никогда не пересекают ее. В тоже время удаленный наблюдатель будет замечать, как замедляется течение времени на падающих часах (см. (9.13)!). На самом деле, это время будет замедляться так быстро, что падающая частица достигнет радиуса Шварцшильда (и окажется в абсолютном будущем для удаленного наблюдателя!) за *конечное собственное время*.

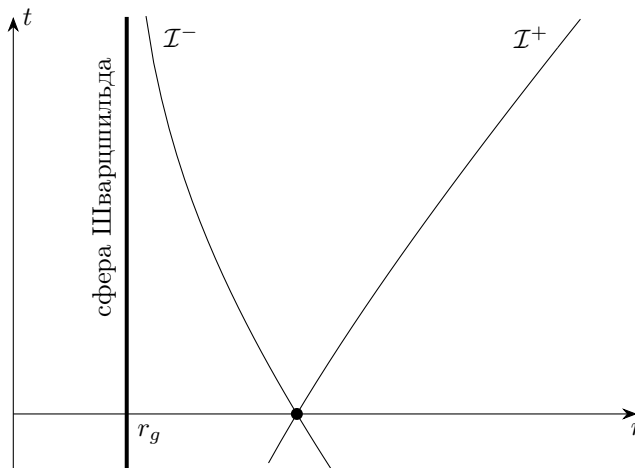


Рис. 9.1. Изотропные геодезические \mathcal{I}^\pm в шварцшильдовой метрике, соответствующие двум знакам в уравнении (9.14). Кривая \mathcal{I}^- приближается к сфере Шварцшильда, но никогда не достигает ее. Кривая \mathcal{I}^+ уходит на бесконечность. Область внутри сферы Шварцшильда не покрывается картой и, на самом деле, не имеет смысла.

Чтобы убедиться в этом, найдем времениподобную геодезическую в плоскости (t, r) . Проще решить не уравнение геодезической (3.5), а уравнение Гамильтона—Якоби (3.19):

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = m^2. \quad (9.15)$$

Умножив обе части на $1 - r_g/r$, мы получим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = m^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2 \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2.$$

Левая часть содержит только производную по t , а правая — только производную по r . Давайте искать решение в таком виде, чтобы обе части были равны константе. Положим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \quad (9.16)$$

Константа E имеет смысл энергии системы, и связана с однородностью задачи по времени. Так как энергия всюду входит в виде квадрата, мы будем считать ее положительной. Теперь имеем

$$S(t, r) = -Et + S_r(r),$$

и уравнение превращается в уравнение для S_r :

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = E^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} - m^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}.$$

Отсюда получаем

$$S_r(r) = \pm \int dr \sqrt{\frac{r^2 E^2}{(r - r_g)^2} - \frac{r m^2}{r - r_g}}.$$

Дифференцируя полное действие $S(t, r, E)$ по константе E , имеем

$$-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}},$$

где t_0 — новая константа, имеющая смысл «начального» момента времени. Итак

$$t - t_0 = \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} \quad (9.17)$$

Это — алгебраическое уравнение, задающее мировую линию частицы. Мы сейчас не будем изучать подробно это уравнение и свойства его решений. Мы сделаем это в следующий раз. Нас интересует собственное время и мы его выпишем:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\right)} - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} = \frac{m^2}{E^2} \frac{dr^2}{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}.$$

Отсюда

$$ds = \frac{m}{E} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (9.18)$$

Найдем полное собственное время, которое требуется частице, чтобы переместиться из точки r_0 в точку r_g . Извлекая корень, находим

$$s_{\text{пад}} = \frac{m}{E} \int_{r_g}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (9.19)$$

Важно, что собственное время падения *конечно*, так как всюду конечно подинтегральное выражение при том условии, что оно было конечно в начальный момент времени. Это всегда так, если $E > m$ (частица пришла из бесконечности). Если же $E < m$, то имеется максимально удаленная точка, для которой знаменатель обращается в нуль. Это соответствует финитному движению (частица взлетела, а потом начала падать). Однако и эта корневая особенность интегрируема.

Чтобы построить координаты, выходящие за пределы шварцшильдовской карты, придется отказаться от статичности метрики. Вместо координат (t, r) удобно было бы использовать координаты светового конуса, которые лежали бы вдоль решений уравнения (9.14):

$$dU = dt - \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad dV = dt + \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (9.20)$$

Явное интегрирование дает

$$U = t - r^*, \quad V = t + r^*, \quad r^* = r + r_g \log \left(\frac{r}{r_g} - 1 \right). \quad (9.21)$$

Эти уравнения определяют t, r как функции переменных U, V . Важно то, что любой паре вещественных чисел (U, V) можно сопоставить точку в области $r > r_g$. Бесконечному прошлому и бесконечному будущему в шварцшильдовой метрике отвечают пределы $U + V \rightarrow \mp\infty$, бесконечно удаленной точке при конечном времени $-V - U \rightarrow +\infty$, а сфере Шварцшильда $-V - U \rightarrow -\infty$.

Переменные U, V дают возможность построить сразу несколько координатных систем. Начнем с простейшей. Выберем в качестве времени одну из координат светового конуса, например V , а в качестве пространственной координаты оставим r . Тогда мы получим координаты Эддингтона—Финкельштейна:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dV^2 - 2dV dr - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (9.22)$$

Метрика в этих координатах по-прежнему стационарна. Однако поверхность $r = r_g$ уже не содержит сингулярности: компоненты не имеют особенностей, а метрика невырождена, $g = -r^4 \sin^2 \vartheta \neq 0$. Легко видеть, что кривые $r = r_g, \vartheta = \text{const}, \varphi = \text{const}$ являются времениподобными геодезическими. Эти геодезические входят в непрерывное семейство времениподобных геодезических $U = \text{const}$, которые расходятся от центра при $r > r_g$ и сходятся к центру при $r < r_g$ (Рис. 9.2). Поверхность $r = r_g$ представляет собой *горизонт событий будущего* \mathcal{H}^+ , из-за которого мы не можем получать никаких сигналов, так как все частицы, испущенные под горизонтом событий, не выходят из под него, а падают на сингулярность, которая лежит на линии $r = 0$. Область внутри горизонта событий будущего называют *черной дырой*.

Координаты Эддингтона—Финкельштейна сохраняют стационарность метрики, однако в них мы теряем симметрию по отношению к обращению времени. Легко видеть, что это связано с тем фактом, что линия $r = r_g$ в этих координатах находится в *абсолютном будущем* по отношению ко всей области $r > r_g$ и в шварцшильдовых координатах находится в бесконечном будущем $t \rightarrow +\infty$. Сфера Шварцшильда оказывается точкой в бесконечном прошлом, а «узкая» область вблизи сферы Шварцшильда растягивается в горизонт \mathcal{H}^+ . Обращению времени в этой конструкции отвечает замена $V \rightarrow -U$, что дает альтернативную систему координат Эддингтона—Финкельштейна

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dU^2 + 2dU dr - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (9.23)$$

описывающую события в бесконечном прошлом по отношению к системе координат Шварцшильда. В новой системе координат поверхность $r = r_g$ представляет собой *горизонт событий прошлого* \mathcal{H}^- . Сингулярность $r = 0$ в этой области не поглощает частицы, а испускает их. Область внутри горизонта событий прошлого называют *белой дырой*.

Как же совместить две картины (9.22) и (9.23)? Для этого надо полностью перейти к координатам светового конуса U, V :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r(U, V)}\right) dU dV - r^2(U, V)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (9.24)$$

Пока мы ничего нового, по сути, не внесли. Новая идея состоит в том, чтобы осуществить отображение по-отдельности для переменных U, V на полуось. Это отвечает тому, что мы теперь воспринимаем плоскость (t, r) не как предел квадрата со сторонами, параллельными осям t и r , а как предел

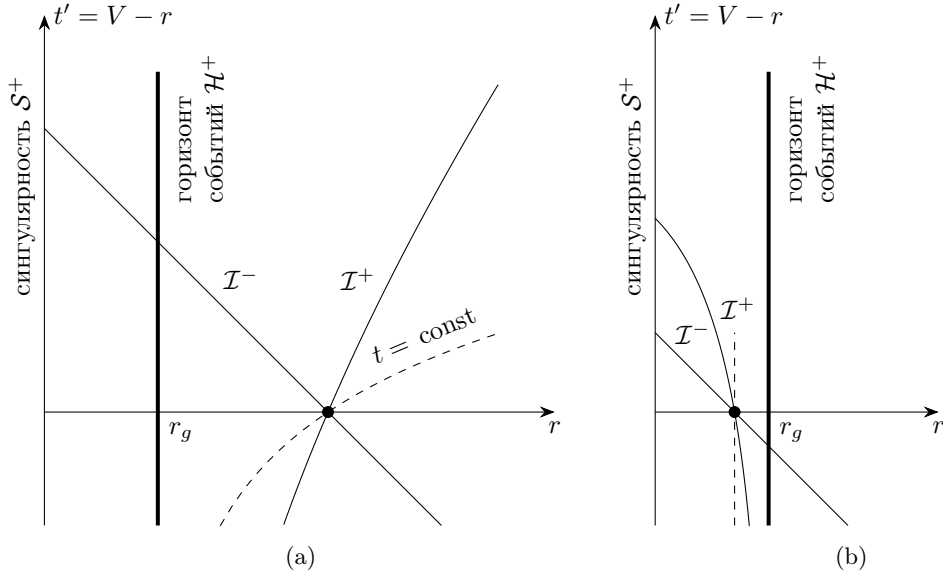


Рис. 9.2. Координаты Эддингтона—Финкельштейна. Для большей наглядности на оси ординат мы отложили время $t' = V - r$, асимптотически переходящее в временную координату пространства Минковского. (а) Начальная точка находится вне горизонта событий. Времениподобная кривая \mathcal{I}^- пересекает горизонт событий и достигает сингулярности. Кривая \mathcal{I}^+ уходит на бесконечность. Пунктирной линией обозначена поверхность синхронных событий, т.е. постоянного шварцшильдовского времени t . (б) Начальная точка находится за горизонтом событий. Обе времениподобных геодезических \mathcal{I}^- и \mathcal{I}^+ достигают сингулярности. Одновременными в смысле синхронизации часов здесь будут события на поверхности $r = \text{const}$ (пунктир).

квадрата со светоподобными сторонами, параллельными осям U и V . В координатах Эддингтона—Финкельштейна мы спокойно «уходили на временную бесконечность», оставляя конечными координаты V и r , то координата U будет стремиться к бесконечности вместе с $t = (U + V)/2$. Поэтому неплохо бы ее как-то «поджать». Аналогично, в прошлом неплохо бы «поджать» с другой стороны. Это достигается в *координатах Крускала*

$$u = -2r_g e^{-U/2r_g}, \quad v = 2r_g e^{V/2r_g}, \quad (9.25)$$

которые остаются конечными на горизонтах событий. Области $r > r_g$ отвечает квадрант $u < 0$, $v > 0$, причем значению $r = r_g$ при конечных t отвечает, как мы уже говорили, *двумерная сфера* $u = v = 0$. Это немедленно сказывается на метрике. Она перестает быть сингулярной на этой сфере:

$$ds^2 = \frac{r_g}{r(u, v)} e^{-r(u, v)/r_g} du dv - r^2(u, v) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (9.26)$$

Здесь r записана как функция новых переменных u, v , то есть решает уравнение

$$uv = -4r_g^2 e^{r/r_g} \left(\frac{r}{r_g} - 1 \right). \quad (9.27)$$

Систему координат Крускала удобно изобразить графически с помощью *диаграммы Пенроуза* или *конформной диаграммы*. Для этого от некомпактных координат u, v следует перейти к компактным переменным u', v' с помощью замены

$$u = 2r_g \operatorname{tg} u', \quad v = 2r_g \operatorname{tg} v'.$$

В двумерном пространстве (u, v) это преобразование является конформным и сохраняет изотропные направления. Дополнительное *преобразование Вейля*

$$g'_{\mu\nu}(x) = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x)$$

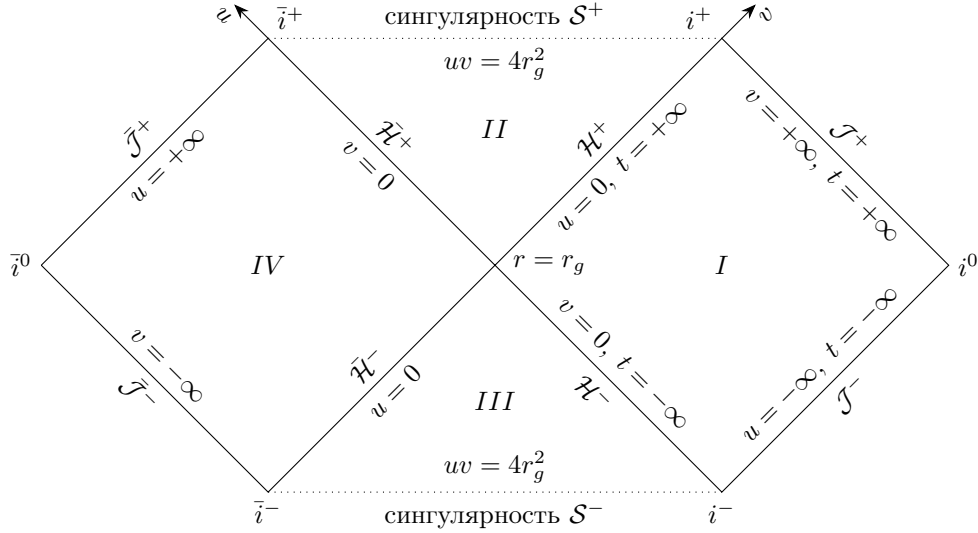


Рис. 9.3. Диаграмма Пенроуза для максимально расширенного многообразия Крускала. I — область, покрываемая картой Шварцшильда; II — черная дыра; III — белая дыра; IV — «зазеркалье».

с множителем

$$\Omega(x) = \frac{r(u, v)}{r_g} e^{\frac{r(u, v)}{r_g}} \frac{1}{(1 + u^2/4r_g^2)(1 + v^2/4r_g^2)}$$

отобразит метрику (9.26) в плоскую метрику листа бумаги. В общем случае диаграммы Пенроуза получаются сжатием («компактификацией») координат светового конуса, поэтому изотропные кривые всегда изображаются на них отрезками прямых, лежащими под углом 45° к горизонту, и причинная структура пространства-времени становится понятной. Диаграмма Пенроуза для метрики Шварцшильда изображена на Рис. 9.3.

Горизонт событий будущего \mathcal{H}^+ изображается лучом $u = 0, v > 0$, а горизонт событий прошлого — лучом $v = 0, u < 0$. Оба луча ограничивают внешнюю область $v > 0, u < 0$, что эквивалентно $r > r_g$ в шварцшильдовых координатах (и координатах Эддингтона—Финкельштейна). Эта область обозначена на конформной диаграмме 9.3 как область I . Качественно координаты Шварцшильда на конформной диаграмме изображены на Рис. 9.4.

Достоинство координат u, v состоит в том, что мы можем продолжить метрику (9.26) из области $u < 0, v > 0$ (область I) в будущее в область $u, v > 0$ (область II , черная дыра) и в прошлое в область $u, v < 0$ (область III , белая дыра). Формально области II и III отвечают значениям $r < r_g$, но, на самом деле, представляют собой две совершенно отдельные области пространства-времени, лишь формально накладывающиеся на одну и ту же нефизическую область координат Шварцшильда. Насколько далеко можно продолжить метрику в область положительных значений uv ? До тех пор, пока мы не достигнем линий

$$r(u, v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad uv = 4r_g^2. \quad (9.28)$$

При $u, v > 0$ сингулярность находится в абсолютном будущем (см. рис. 9.3) для всех событий внутри области II . Никакая траектория не может миновать сингулярности. При $u, v < 0$ сингулярность находится в абсолютном прошлом.

Важный факт состоит в том, что внутри черной дыры частица достигает сингулярности за конечное собственное время. Действительно, для вычисления этого собственного времени мы можем воспользоваться формулой (9.18) в силу того, что координаты внутри черной дыры могут быть записаны в шварцшильдовом виде. Имеем

$$s_{II} = \frac{m}{E} \int_0^{r_g} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (9.29)$$

Эта величина, очевидно, конечна.

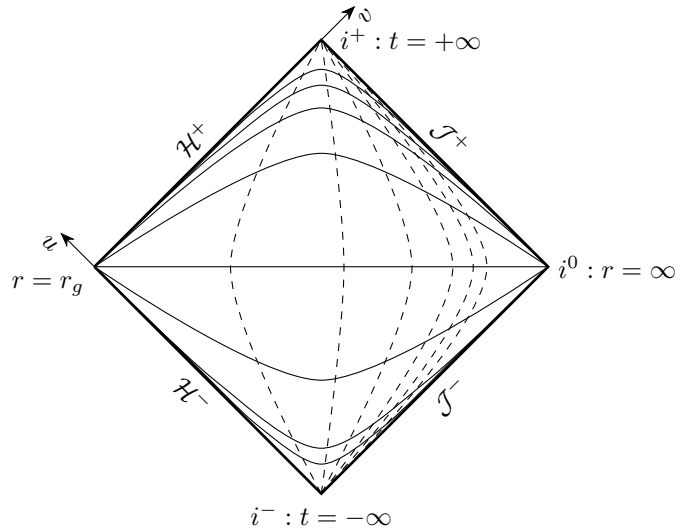


Рис. 9.4. Координатная сетка Шварцшильда в области I диаграммы Пенроуза (качественно). Линии времени t (пунктирные) сгущаются к правому краю, линии радиальной координаты r (сплошные) сгущаются сверху и снизу.

Кроме областей I , II и III мы видим на диаграмме область IV , которая необходима, если мы хотим избежать ситуации, когда частицы пропадают неизвестно куда или появляются ниоткуда в регулярных точках.⁸ Эта область представляет собой невидимый «зеркальный мир», с которым не может быть никакого взаимодействия,⁹ но который обязан существовать. Формально горизонт \bar{H}^+ и бесконечность \bar{J}^+ отображаются в область $t \rightarrow -\infty$, а горизонт \bar{H}^- и бесконечность \bar{J}^- — в область $t \rightarrow +\infty$, так что можно предположить, что время там течет в некотором смысле назад. Однако, скорее всего, это относится к области умозрительных непроверяемых предположений.

Задачи

1. Покажите, что векторные поля J_i , определенные в (9.1), являются векторами Киллинга в плоском пространстве-времени и удовлетворяют соотношениям (9.2) алгебры $so(3)$.
2. Покажите, что векторные поля J_i в сферических координатах имеют вид (9.5).
3. Завершите доказательство (9.6).
4. Проверьте формулы (9.9) и (9.10).
5. Найдите символы Кристоффеля метрики Шварцшильда в координатах Эддингтона—Финкельштейна.
6. Найдите тензор Римана в координатах Эддингтона—Финкельштейна. Покажите, что он не имеет особенностей на горизонте событий. Найдите его особенность в окрестности сингулярности черной дыры.

Семинар 9

Гравитационное поле статического сферически-симметричного тела

В случае сферически-симметричного тела с тензором энергии-импульса

$$T_0^0 = \rho(r), \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p(r)$$

⁸Естественно, можно рассматривать и многолистные накрытия пространства, изображенного на рис. 9.3 с точкой ветвления $u = v = 0$ ($r = r_g$), в которых будет несколько (или даже бесконечно много) областей типа I, II, III, IV .

⁹Точнее, мы можем что-то узнать об этом мире, только упав на черную дыру, если мы, конечно, выживем в сильном гравитационном поле. Да и то наше знание пропадет, когда мы упадем на сингулярность.

задачу нахождения гравитационного поля можно решить точно. Уравнения Эйнштейна принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{h} &= 0, \\ r^{-1}e^{-2h}(k' + h') &= 4\pi G(\rho + p), \\ e^{-2h}(k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h')) &= 8\pi Gp, \\ r^{-2}(1 - e^{-2h}) + r^{-1}(h' - k')e^{-2h} &= 4\pi G(\rho - p).\end{aligned}$$

Первое уравнение приводит к статичности метрики. Уравнение для $h(r)$ отделяется и дает

$$e^{-2h} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r}, \quad m(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho(r).$$

С помощью четвертого уравнения отсюда легко найти $k'(r)$:

$$\frac{dk}{dr} = G \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r(r - 2Gm(r))}.$$

Подставляя ответ в третье уравнение, получаем *условие статического равновесия Оппенгеймера—Волкова*

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{(\rho + p)(m(r) + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2Gm(r))}. \quad (9.30)$$

На этом уравнении строится теория устойчивости звезд (в тех случаях, когда вращением можно пренебречь).