Задачи занятия 19 февраля 2014 года.

Упражнение 1 *Пусть многообразие M^n вложено в $\mathbb{R}^N$. Определим касательные вектора к точке из M^n как вектора в $\mathbb{R}^N$, касательные к M^n в данной точке. Проверьте, что при заменах координат в M^n имеет место закон преобразования*

$$\tilde{v}^{\tilde{k}} = \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{k}}}{\partial x^k} v^k.$$

Упражнение 2 . *Проверьте эквивалентность трех определений векторных полей:*

1. *Как наборы чисел, преобразующихся по соответствующему закону.*
2. *Как класса эквивалентности кривых, проходящих через заданную точку.*
3. *Как дифференциальных операторов первого порядка.*

Задача 1 *Докажите, что если у двух отображений окружности совпадают степени, то они гомотопны, т.е. проверьте следующее утверждение:*

Пусть $f : S^1 \to S^1$, $\psi = f(\phi)$. Тогда существует отображение $\psi = F(\phi, t)$, ϕ – точка окружности-прообраза, ψ – точка окружности-образа, t – точка отрезка $[0, 1]$ со следующими свойствами:

1. *$F(\phi, t)$ – непрерывная функция 2-х переменных.*
2. *$F(\phi, 0) = f(\phi)$*
3. *$F(\phi, 1) = n\phi$, где n – степень отображения.*

Задача 2 *Докажите следующую формулу для степени отображения:*

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(\phi) d\phi.$$

Задача 3 *Докажите следующий алгоритм вычисления степени отображения: пусть ψ_0 – регулярное значение функции $f(\phi)$ (по лемме Сарда оно всегда существует). Число его прообразов конечно и во всех них $f'(\phi) \neq 0$. Обозначим n_+ число прообразов, в которых $f'(\phi) > 0$, n_- – число прообразов, в которых $f'(\phi) < 0$. Тогда степень отображения n дается формулой:*

$$n = n_+ - n_-$$