Задачи занятия 26 февраля 2014 года.

В курсе анализа возникают два типа интегралов по кривой. Прдеположим, что γ – некоторая параметрическая кривая на плоскости; $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$

1. Интеграл первого рода. Пусть задана функция на плоскости $f(x, y)$. Тогда

$$I_1 = \int\limits_{\gamma} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{b} f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\ dt$$

2. Интеграл второго рода. Пусть задана пара функций на плоскости $f(x, y)$, $g(x, y)$. Тогда

$$I_2 = \int\limits_{\gamma} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} [f(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + g(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)]dt$$

Задача 1 *Рассмотрим малый треугольник на плоскости ABC сос торонами длины порядка ε. Если задана функция $f(x, y)$ на плоскости, то для интегралов первого рода в типичной ситуации имеем:*

$$\int\limits_{[AC]} f(x,y)ds + \int\limits_{[CB]} f(x,y)ds - \int\limits_{[AB]} f(x,y)ds \sim \epsilon.$$

В то же время для пары функций $f(x, y)$, $g(x, y)$ и интегралов второго рода имеем:

$$\int\limits_{[AC]} f(x,y)dx + g(x,y)dy + \int\limits_{[CB]} f(x,y)dx + g(x,y)dy - \int\limits_{[AB]} f(x,y)dx + g(x,y)dy \sim \epsilon^2.$$

Задача 2 *Для пара дифференциальных форм ω_1 и ω_2 порядков k и l соответственно имеет место соотношение:*

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{k \cdot l} \omega_2 \wedge \omega_1$$

Задача 3 *Проверте корректность (независимость от выбора координат) определения внешней производной формы.*

Задача 4 *Докажите, что отображение $S^2 \to S^2$, переводящее точку в ее антипод, обращает ориентацию.*

Задача 5 *Докажите, что на любом компактном многообразии существует хотя бы одна риманова метрика.*

Задача 6 *Вычилите эйлеровы характеристики S^2, RP^2, тора, бутылки Клейна, кренделя.*