

Задачи занятия 12 марта 2014 года.

Рассмотрим модель Пуанкаре плоскости Лобачевского – это внутренность круга. Граничная окружность называется абсолют. В этой модели прямые – это прямые или окружности, перпендикулярные абсолюту. Изометрии модели – дробно-линейные преобразования, углы в данной модели изображаются обычными углами.

Задача 1 Построить правильный 8-угольник в модели Пуанкаре с углами при вершинах 45° .

Задача 2 Построить преобразование, перемещающее правильный 8-угольник с углами 45° в прилегающий к нему. При этом сторона, по которой восьмиугольники соприкасаются, должна перейти в противоположную.

Задача 3 С помощью операций над многоугольниками (или, что эквивалентно, вычислений в группах), докажите, что $\mathbb{R}P^2 \# T^2 = \mathbb{R}P^2 \# K$ (здесь K – бутылка Клейна).

Задача 4 Рассмотрим два способа склейки восьмиугольника – по правилу $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ и по правилу $ABCD A^1 B^{-1} C^{-1} D^{-1}$. Докажите, что они дают изоморфные 2-мерные многообразия.

Задача 5 Рассмотрим локально мероморфное векторное поле в области комплексной плоскости $f(z)\partial_z$. Как связаны его вещественная и мнимая части?

Задача 6 Рассмотрим локально мероморфное векторное поле $f(z)\partial_z$. Рассмотрим его вещественную часть. Чему равен ее индекс в нуле? В полюсе?

Задача 7 Рассмотрим локально мероморфное векторное поле в области комплексной плоскости $f(z)\partial_z$. Докажите, что $\frac{1}{f(z)}dz$ – корректно определенная 1-форма (т.е. данное определение не зависит от выбора координат). Как вычислить эйлерову характеристику римановой поверхности по мероморфной 1-форме на ней?

Задача 8 Вычислить особенность поля ∂_z на CP^1 в бесконечно удаленной точке.

Задача 9 Рассмотрим риманову поверхность $\Gamma : w^2 = P(z)$, где $P(z)$ -многочлен 6-ой степени. При каких $k \geq 0$ дифференциал

$$\frac{z^k dz}{2\sqrt{P(z)}}$$

регулярен в бесконечно удаленной точке.

Задача 10 Рассмотрим $n - s$ кривую, т.е. риманову поверхность, заданную уравнением: $z^n - w^s + R(z, w) = 0$, где n и s - взаимно простые натуральные числа, для всех мономов $z^k w^l$, входящих в $R(z, w)$, выполнено соотношение $ks + nl < ns$. Вычислить ее эйлерову характеристику.

Указание: Можно рассмотреть форму $\omega = \frac{dz}{R_w(z, w)} = -\frac{dw}{R_z(z, w)}$.