Задачи занятия 11 февраля 2015 года.

Задача 1 *Пусть бутылка Клейна реализована как гладкая поверхность в 5-мерном вещественном пространстве. Докажите, что ее нельзя* **глобально** *задать регулярной системой системой уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) = 0 \\ f_2(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) = 0 \\ f_3(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) = 0. \end{cases}$$

Регулярность означает, что f_1, f_2, f_3 – гладкие функции, якобиан которых имеет ранг 3 во всех точках поверхности.

Задача 2 *Рассмотрим поверхность Γ в эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть на Γ заданы локальные координаты (u^1, u^2). Докажите, что риманова метрика $g_{ij}(u^1, u^2)$, вычисленная в координатах (u^1, u^2), во всех точках точках поверхности является симметричной положительно определенной матрицей.*

Задача 3 *Проверте, что при заменах координат $g_{ij}(u^1, u^2)$ преобразуется как тензор с двумя нижними индексами.*

Задача 4 *Обозначим $g^{ij}(u^1, u^2)$ матрицу, обратную к $g_{ij}(u^1, u^2)$. Проверте, что при заменах координат $g^{ij}(u^1, u^2)$ преобразуется как тензор с двумя верхними индексами.*

Задача 5 *Вычислите риманову метрику 2-мерной сферы $x^2+y^2+z^2 = 1$ в коррдинатах, задаваемых стереографической проекцией из северного полюса на плоскость $z = -1$.*

Задача 6 *Вычислите метрику плоскости в полярных координатах*

$$\begin{cases} x = r\cos(\phi) \\ y = r\sin(\phi). \end{cases}$$

Вычислите метрику пространства в сферических координатах

$$\begin{cases} x = r\cos(\phi)\cos(\theta) \\ y = r\sin(\phi)\cos(\theta) \\ z = r\sin(\theta). \end{cases}$$

Задача 7 *Введем следующие обозначения:*

$$\Gamma_{k,ij} = \left(e_k, \frac{\partial e_i}{\partial x^j}\right)$$

(Внимание! На лекции былы использованы чуть другие обозначения.)

Проверьте, что символы Кристоффеля выражаются через $\Gamma_{k,ij}$ *подъемом индекса*

$$\Gamma^l_{ij} = g^{lk}\Gamma_{k,ij}.$$