Задачи занятия 18 марта 2015 года.

Задача 1 *Рассмотрим топологическое пространство X, в котором всего два множества открыты – само X и пустое множество $\varnothing$. Опишите все непрерывные отображения $X \to \mathbb{R}$ и $R \to X$.*

Задача 2 *Рассмотрим топологическое пространство X, в котором все подмножества открыты. Опишите все непрерывные отображения $X \to \mathbb{R}$ и $R \to X$.*

Задача 3 *Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ с топологией Зарисского: множество является замкнутым, если оно задано системой полиномиальных уравнений:*

$$\begin{cases} p_1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \dots \\ p_k(x^1, \dots, x^n) = 0. \end{cases}$$

Проверьте, что это действительно топология.

Задача 4 *Предъявите счетную базу топологии в $\mathbb{R}^n$.*

Задача 5 *Докажите, что в топологии с первой аксиомой отделимости любая точка – замкнутое множество.*

Задача 6 *При каких $p > 0$ функция пары точек в $\mathbb{R}^2$*

$$\rho(X, Y) = \sqrt[p]{|x^1 - y^1|^p + |x^2 - y^2|^p},$$

где $X = (x^1, x^2)$, $Y = (y^1, y^2)$, задает метрику?

Задача 7 *Рассмотрим тройку векторных полей в пространстве кватернионов:*

$$I(q) = q \cdot i, \quad J(q) = q \cdot j, \quad K(q) = q \cdot k.$$

Докажите, что эти поля касательны к единичной сфере во всех точках, и при этом во всех точках сферы они линейно независимы.