Задачи занятия 08 апреля 2015 года.

Задача 1 *Проверьте, что умножение в фундаментальной группе ассоциативно.*

Задача 2 *Проверьте, что обратный элемент фундаментальной группы дается равенством:*

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t).$$

Задача 3 *Рассмотрим следующую операцию: зафиксируем путь* $h = h(t)$ *и каждый путь* $x = x(t)$ *заменим на следующий* $\tilde{x}$: *сначала пройдем вдоль пути* h, *затем вдоль пути* x *и, затем, вдоль пути* h *в обратном направлении. Докажите, что эта операция отвечает сопряжению в фундаментальной группе:*

$$\tilde{x} = hxh^{-1}.$$

Задача 4 *Вычислите коэффициент зацепления пары окружностей*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+1)^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Задача 5 *Вычислите попарные коэффициенты зацепления колец Борромео.*

Задача 6 *Коэффициент зацепления для пары окружностей в* $\mathbb{R}^3$ *можно определить как степень отображения* $T^2 \to S^2$. *Пусть пара непересекающихся окружностей задана параметрически:* $\vec{r}_1(t)$ *и* $\vec{r}_2(\tau)$, $0 \le t \le 2\pi$, $0 \le \tau \le 2\pi$. *Естественно определить отображение:*

$$T^2 \to S^2 : \quad (t, \tau) \to \frac{\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(\tau)}{\|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(\tau)\|}.$$

Его степень и есть коэффициент зацепления. Проверьте, что она дается формулой:

$$K = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{\partial \vec{r}_1(t)}{\partial t}, \frac{\partial \vec{r}_2(\tau)}{\partial \tau}, \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(\tau)\right)}{\|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(\tau)\|^3} dt \wedge d\tau. \qquad (1)$$

Задача 7 *Вычислите инвариант Хопфа расслоения Хопфа.*

Задача 8 *Проверьте, что вариационная производная функционала (1) нулевая по обоим аргументам:*

$$\frac{\delta K[\vec{r}_1, \vec{r}_2]}{\delta \vec{r}_1(t)} = \frac{\delta K[\vec{r}_1, \vec{r}_2]}{\delta \vec{r}_2(\tau)} = 0.$$

Задача 9 *Пользуясь простейшими триангуляциями, вычислите:*

- $H_n(S^n)$.
- $H_n(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z})$, $H_n(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$.
- $H_n(M^2_{0r}, \mathbb{Z})$.
- $H^n(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z})$, $H^n(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$.