Задачи занятия 25 февраля 2016 года.

Задача 1 *Рассмотрим расслоение Хопфа $S^3 \to S^2$. Отобразим $S^3 \to \mathbb{R}^3$ при помощи стереографической проекции. Мы получаем расслоение трехмерного пространства на окружности (одна из них, проходящая через точку, из которой осуществляется проекция, изображается прямой). Опишите эту конструкцию, в частности убедитесь, что любые две окружности зацеплены.*

Задача 2 *Опишите все расслоения над S^1 со слоем $\mathbb{Z}_2$.*

Задача 3 *Опишите все расслоения над S^1 со слоем отрезок.*

Задача 4 *Опишите все расслоения над S^1 со слоем $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.*

Задача 5 *Рассмотрим пару непересекающихся окружностей $f_1(t)$, $f_2(\tau)$ в трехмерном пространстве, $f_1(t), f_2(\tau) \in \mathbb{R}^3$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq \tau \leq 2\pi$, $f_1(t) \neq f_2(\tau)$ для любой пары t, τ. Коэффициент зацепления этой пары окружностей можно определить формулой:*

$$I[f_1, f_2] = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{\partial \vec{f}_1(t)}{\partial t}, \frac{\partial \vec{f}_2(\tau)}{\partial \tau}, \vec{f}_1(t) - \vec{f}_2(\tau) \right)}{\| \vec{f}_1(t) - \vec{f}_2(\tau) \|^3} dt \wedge d\tau. \tag{1}$$

Проверьте, что

$$\frac{\delta K}{\delta r_1(t)} = \frac{\delta K}{\delta r_2(\tau)} = 0,$$

и, тем самым, он не меняется при гомотопиях отображений окружностей, в процессе которых они никогда не пересекаются.