Задачи занятия 16 февраля 2017 года.

Задача 1 *Переформулируйте определение топологического пространства в терминах замкнутых множеств.*

Задача 2 *Постройте счетную базу открытых множеств на прямой* $\mathbb{R}$.

Задача 3 *Постройте счетную базу открытых множеств для пространства* $\mathbb{R}^n$.

Задача 4 *Рассмотрим топологию Зарисского в* $\mathbb{R}^n$ *или* $\mathbb{C}^n$*: множество замкнуто, если оно задано системой полиномиальных уравнений:*

$$\begin{cases} p_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots \\ p_k(x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{cases}$$

k *– любое целое число,* $p_j(x_1, \ldots, x_n)$ *– некоторые многочлены от n переменных. Докажите, что это действительно топология. Теорему о многочленах Гильберта (любая система полиномиальных уравнений эквивалентна конечной) считать известной.*

Задача 5 *Пусть на пространстве* X *задана топология, в которой открыты само* X *и пустое множество* $\varnothing$*. Опишите все непрерывные отображения* $X \to \mathbb{R}$ *и* $\mathbb{R} \to X$.

Задача 6 *Пусть на пространстве* X *задана топология, в которой открыты все подмножества (дискретная топология). Опишите все непрерывные отображения* $X \to \mathbb{R}$ *и* $\mathbb{R} \to X$.

Задача 7 *Пусть* $p > 1$ *– некоторое положительное целое число. Для начала рассмоторим всевозможные дроби вида* $x = r \cdot p^n$*, где* r *не делится на* p*, или, что эквивалентно, конечные дроби вида* $x = r_m r_{m-1} \ldots r_1 r_0, r_{-1} r_{-2} \ldots r_{-n}$*, записанные по основанию* p*. Введем следующую норму на пространстве таких дробей*

$$\|x\|_p = p^{-n}, \quad \|0\|_p = 0$$

и соотвествующее ей расстояние

$$\rho(x, y) = \|x - y\|_p.$$

Пополнением этого пространства будут всевозможные дроби, конечные ***вправо*** *и бесконечные* ***влево****.*

Пусть $p = 10$.

1. *Чему равно 1/3?*

2. *Найдите все решения уравнения* $x^2 = x$ *(их больше, чем 2).*